Szakács Jenő Megyei Fizikaverseny

2024/2025. tanév

I. forduló

Megoldások

2024. december 9.

Minden versenyzőnek a számára (az alábbi táblázatban) kijelölt ***négy*** *feladatot kell megoldania. Azoknak a tanulóknak, akik nem gimnáziumi rendszerben tanulnak fizikát, az* ***A*** *feladatsort kell megoldani.*

A rendelkezésre álló idő 180 perc. A feladatok megoldásait önállóan kell elkészítenie, függvénytáblázat és zsebszámológép használható. Minden feladatot külön lapon oldjon meg! A feladatok különböző pontértékűek és az egyes kategóriákban elérhető maximális pontszámok is eltérőek.

A gimnazisták feladatai		*A szakközépiskolások feladatai*	
9. *osztály*	**1., 2., 3., 4.** *(100 pont)*	**A.**	**1., 2., 4., 10.** *(90 pont)*
10. *osztály*	**5., 8., 9., 10.** *(100 pont)*		
11. *osztály*	**6., 11., 12., 14.** *(100 pont)*		
12. *osztály*	**7., 9., 13., 14.** *(100 pont)*		

FIGYELEM!!!
Azokban a feladatokban, ahol erre az adatra szükség van, vegye a földfelszíni gravitációs gyorsulás értékét **10 m/s²**-*nek (hacsak a feladat nem ad meg más értéket)!*

Jó munkát kívánunk!

1. Egy 22 m szélességű úttest mellett, a járda szélén állunk. Az úttest középvonalán 3,6 km/h sebességgel halad egy jármű, melynek hossza 5 m, szélessége 2 m. A járdáról akkor lépünk le, amikor a jármű eleje egy vonalba ér velünk. Mekkora sebességgel kell átkelnünk a középvonalra merőleges irányban, hogy utunkat megállás nélkül folytathassuk? **(20 pont)**

Megoldás:
Jelölések és adatok: $D = 22$ m; $u = 3{,}6$ km/h $= 1$ m/s *(2 pont)*; $\ell = 5$ m; $d = 2$ m; $v = ?$
A jármű felénk eső oldalának pályája tőlünk $y = \frac{D-d}{2} = \frac{22\text{ m} - 2\text{ m}}{2} = 10$ m *(4 pont)* távolságra van. Ezt ugyanakkora Δt idő alatt kell elérnünk, mint amennyi idő alatt a jármű elhalad előttünk *(6 pont)*.
Ezt fogalmazzuk meg kétféleképpen:
$\Delta t = \frac{y}{v} = \frac{\ell}{u}$ *(4 pont)*, amiből $v = u\frac{y}{\ell} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\ \frac{10\text{ m}}{5\text{ m}} = \underline{2\text{ m/s}}$. *(4 pont)*

2. A KRESZ meghatározásai kissé egyszerűsítve:

- Reakcióidő (t_r): az akadály észleléstől a jármű lassulásának kezdetéig eltelt idő, átlagosan t_r = 1 másodperc.
- Követési távolság (k): a gépkocsivezető reakcióideje alatt megtett út (eközben a jármű sebessége állandó).
- Fékút ($s_{\text{fékút}}$): a jármű fékezése közben megtett legrövidebb út (eközben a jármű állandó lassulással halad a megállásig).
- Féktáv ($s_{\text{féktáv}}$): a követési távolság és a fékút összege.

Egy egyenes útszakaszon egyforma gépkocsik haladnak v = 50 km/h sebességgel és azonos követési távolsággal. A gépkocsik fékútja is megegyezik.

(a) Mekkora a gépkocsik követési távolsága? **(6 pont)**
(b) Mekkora a fékút, ha fékezéskor a lassulása a = 5 m/s^2? **(6 pont)**
(c) Mekkora a féktáv? A gépkocsik a saját féklámpájuk kigyulladásakor kezdenek el lassulni. **(6 pont)**
(d) A gépkocsik hossza L = 5 m. Legföljebb hány gépkocsi haladhat át óránként egy adott útszelvényen a megadott sebességgel, ha betartják a követési távolságot? **(7 pont)**

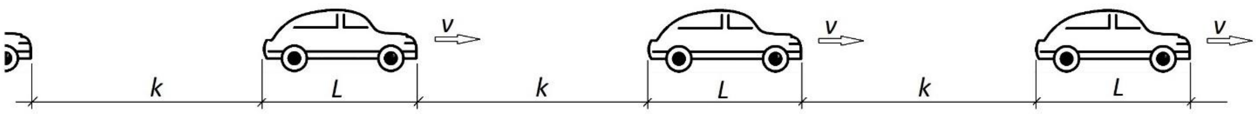
Megoldás:

(a) A követési távolság *(6 pont)*: $k = v t_r = \frac{50}{3{,}6}\text{ m/s} \cdot 1\text{ s} \approx 13{,}89\text{ m}$.

(b) A fékút *(6 pont)*: $s_{\text{fékút}} = \frac{v^2}{2a} = \frac{13{,}89^2}{2 \cdot 5} \approx 19{,}29\text{ m}$.

(c) A féktáv: *(6 pont)*: $s_{\text{féktáv}} = k + s_{\text{fékút}} = 13{,}89\text{ m} + 19{,}29\text{ m} \approx 33{,}18\text{ m}$.

(d) Akkor halad át legtöbb gépkocsi, ha egyik sem fékez, és mindegyik között a távolság a követési távolság.



A gépkocsik és a gondolatban hozzájuk képzelt követési távolságuk v sebességgel haladnak. Ha t idő alatt N darab gépkocsi halad át egy adott útszelvényen (az ábrán N = 3), az áthaladó konvoj hossza megegyezik a t idő alatt v sebességgel megtett úttal *(4 pont)*:

$$N\left(L+k\right)=vt\,.$$

Innen az időegység alatt áthaladó gépkocsik száma legföljebb *(3 pont)*:

$$n=\frac{N}{t}=\frac{v}{L+k}=\frac{50\,\mathrm{km/h}}{5\,\mathrm{m}+13{,}9\,\mathrm{m}}=\frac{50\,000\,\mathrm{m/h}}{5\,\mathrm{m}+13{,}89\,\mathrm{m}}=2647{,}059\,\frac{\text{darab}}{\text{óra}}\approx 2647\,\frac{\text{darab}}{\text{óra}}\,.$$

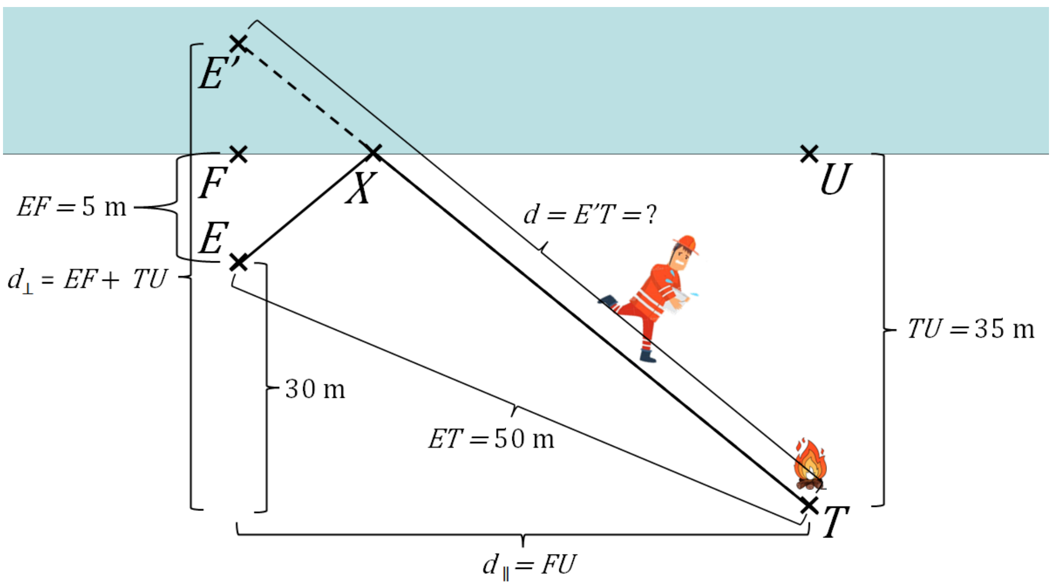
3. A folyóparttól 5 m távolságra egy ember áll, a folyó ugyanezen partján, a parttól 35 m távolságra tábortűz ég. Az ember és a tábortűz távolsága 50 m. A tűz egyszer csak belekap a tőle nem messze felhalmozott rőzserakásba. Mennyi az a legrövidebb idő, amennyi múlva az ember megkezdheti a tűz oltását, ha 5 m/s egyenletes sebességgel tud futni és a vödör megmerítéséhez (a folyóból) 6 s-ra van szüksége? **(30 pont)**

Megoldás:

Jelölések és adatok: E: az ember pozíciója; F: a folyópartnak az emberhez legközelebbi pontja; T: a tábortűz pozíciója; U: a folyópartnak a tábortűzhöz legközelebbi pontja; $EF = 5$ m; $TU = 35$ m; $ET = 50$ m; $v = 5$ m/s; $t_m = 6$ s; $t = ?$

A legrövidebb idő az oltásig a legrövidebb útvonal ismeretében határozható meg *(3 pont)*. Az embernek olyan módon kell egy, a folyóparton található X pontig elfutnia, a vödröt megmerítenie, és X-ből a tábortűzhöz futnia, hogy az EX és az XT távolságok összege a lehető legkisebb legyen *(3 pont)*.

Az ember útvonala az EXT törtvonalat követi. Ugyanolyan hosszúságú vonalat kapunk, ha az E pontot folyópartra tükrözzük az E' pontba, és az $E'XT$ törtvonalat tekintjük *(4 pont)*. A tükrözéssel kapott útvonalnak az az előnye a tényleges útvonalhoz képest, hogy öltheti egy törésmentes egyenes szakasz alakját (a tényleges útvonalnál ez semmiképp nem lehetséges), és így a hossza éppen ilyenkor a legrövidebb („két pont között a legrövidebb út az egyenes”). *(5 pont)*.



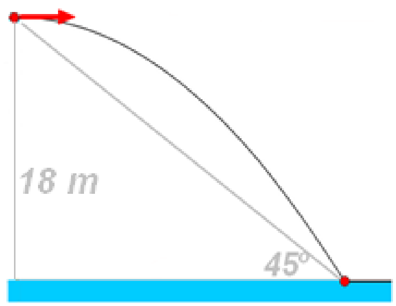
Az E'-ből T-be egyenesen történő elmozdulásnak a folyópartra merőleges része $d_\perp = EF + TU = 5\text{ m} + 35\text{ m} = 40\text{ m}$ (3 pont), a párhuzamos rész az FU-távolság, ami a Pitagorasz-tételből kapható meg: $d_\parallel = FU = \sqrt{ET^2 - (30\text{ m})^2} = \sqrt{(50\text{ m})^2 - (30\text{ m})^2} = 40\text{ m}$ (3 pont).

Így a teljes befutandó út $d = \sqrt{d_\perp^2 + d_\parallel^2} = \sqrt{(40\text{ m})^2 + (40\text{ m})^2} = 56{,}57\text{ m}$ (3 pont).

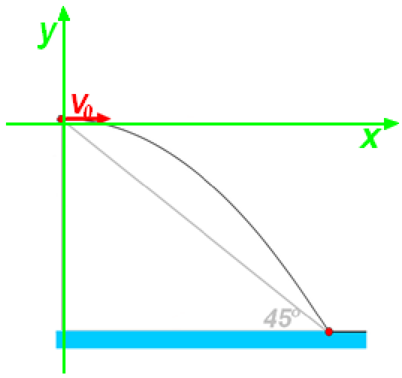
Az oltás megkezdéséig eltelt idő a mozgás idejének és a merítés idejének összege (3 pont):
$t = \frac{d}{v} + t_\text{m} = \frac{56{,}57\text{ m}}{5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} + 6\text{ s} = \underline{\underline{17{,}31\text{ s}}}$ (3 pont).

4. A népszerű krimisorozat egyik epizódjában a gyilkos folyóba dobja a revolverét. A folyó vízszintjéhez képest 18 m magas hídról vízszintes irányban hajítja el a fegyvert a vízbe. A pisztoly becsapódási helyét (a mozgás függőleges síkjában a vízszinteshez képest) 45°-os irányban látja.
(a) Mekkora sebességgel hajította el a fegyvert? **(15 pont)**

(b) Mekkora sebességgel csapódott a pisztoly a vízbe? **(10 pont)**



Megoldás:
(a) Helyezzük a koordinátarendszerünk origóját az eldobási pontba, az x-tengely vízszintes (a kezdősebesség irányában), az y-tengely függőlegesen felfelé. Mivel a szög 45°-os, így ebben a koordinátarendszerben a becsapódási hely koordinátái $x = 18$ m, $y = -18$ m *(2 pont)*.
Az elhajítás (vízszintes) sebességét jelölje v_0, az y irányú gyorsulás $-g$. *(2 pont)*
Vízszintes irányban egyenletes mozgás történik, így:



$18 = v_0 \cdot t$ (1) *(3 pont)*

A függőleges irányban pedig:

$-18 = \frac{1}{2}(-g)\cdot t^2$ (2) *(3 pont)*

Az (1)-(2) egyenletrendszer megoldása $t = 1{,}9\text{ s}$ és $v_0 = 9{,}49\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ *(5 pont)*. Tehát a hajítás sebessége 9,49 m/s volt.

(b) A becsapódás pillanatában a pisztoly x-, illetve y irányú sebességkomponense:

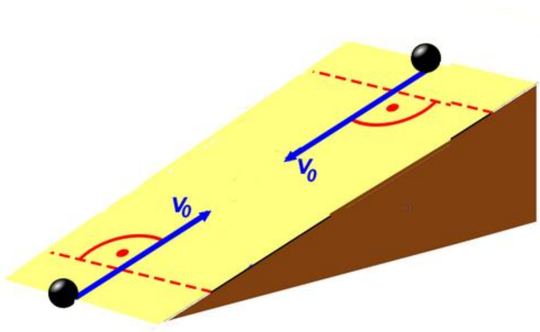
$v_x = v_0 = 9{,}49\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ *(3 pont)*

$v_y = 0 + (-g)\cdot t = -19\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ *(4 pont)*

Így a pisztoly sebességének nagysága a becsapódás pillanatában:

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{9{,}49^2 + 19^2} = 21{,}24\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ *(3 pont)*

5. Jancsi és Juliska egy 45°-os hajlásszögű, súrlódásmentes lejtőn egyszerre indít el egy-egy (elhanyagolható méretű) testet a lejtőn csúsztatva egymás felé azonos 8 m/s kezdősebességgel: Jancsi a lejtő aljáról felfelé, Juliska pedig a lejtő tetejéről lefelé. A testek ütközésekor az egyik test sebessége háromszor akkora, mint a másiké.
Milyen magas a lejtő? **(25 pont)**



Megoldás:
v_0 = 8 m/s, α = 45°, g = 10 m/s^2.

Mindkét test (lejtő irányú) gyorsulásnak nagysága $a = g \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 7{,}07 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, de ellenkező előjelű, a felfelé mozgónak negatív (lassul), a lefelé mozgónak pozitív (gyorsul). *(5 pont)*.

A felfelé mozgó test sebessége v_0-ról v-re csökken, a lefelé mozgóé pedig v_0-ról $3v$-re nő, tehát

$$3(v_0 - a \cdot t) = v_0 + a \cdot t,$$

amiből t = 0,566 s *(8 pont)*.

(Ellenőrzés:
A felfelé mozgó test sebessége az ütközés pillanatában:

$$v_{fel} = v_0 - a \cdot t = 4 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A lefelé mozgó test sebessége az ütközés pillanatában:

$$v_{le} = v_0 + a \cdot t = 12 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.)$$

A felfelé mozgó test által megtett út:

$$s_{fel} = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = 3{,}4\ \mathrm{m}.$$ *(4 pont)*

A lefelé mozgó test által megtett út:

$$s_{le} = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 5{,}66\ \mathrm{m}.$$ *(4 pont)*

Tehát a lejtő alja és teteje közötti távolság:

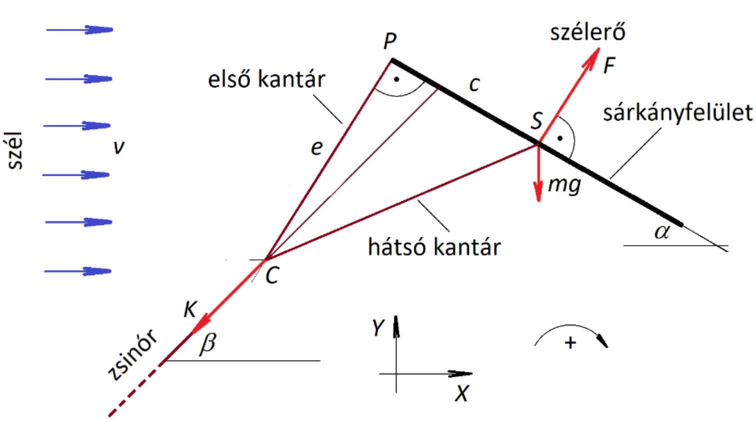
$s = 3{,}4$ m + 5,66 m = 9,06 m . *(1 pont)*

A lejtő magassága:

$$h = \frac{9{,}06\ \mathrm{m}}{\sqrt{2}} = 6{,}4\ \mathrm{m}.$$ *(3 pont)*

Tehát a lejtő magassága 6,4 m.

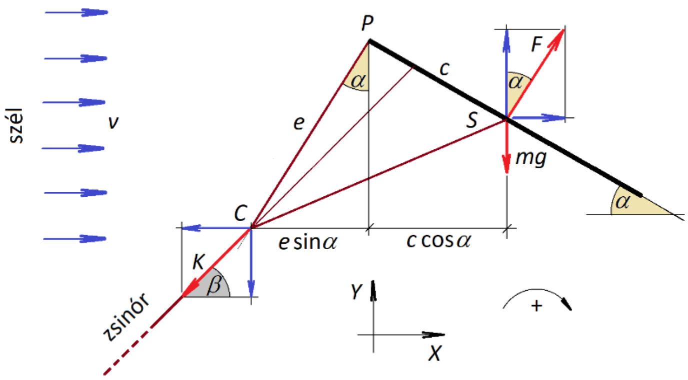
6. Kínában már 2500 évvel ezelőtt röptettek papírból, selyemből, bambusznádból készült sárkányokat. A mellékelt rajzon egy síklap alakú, farok nélküli egyszerű sárkány méreteit ábrázoltuk oldalnézetben.



A sárkány tömege m = 0,2 kg, a P orrpontja és az S súlypontja közötti távolság c = 0,4 m. A vitorlafelület α = 30°-os, az eresztőzsinór β = 45°-os szöget zár be a vízszintessel. A zsinór tömegét és légellenállást hanyagoljuk el. A zsinór és a kantárok anyaga megegyezik. Az első kantár hossza e = 0,5 m, és merőleges a sárkányfelületre, mivel a légellenállást elhanyagoljuk. A feltüntetett állapotban a sárkányra ható erők egyensúlyban vannak. (Ez a farok nélküli papírsárkány egyszerűsített aerodinamikai modellje.) g = 10 m/s^2.

(a) Mekkora kötélerő (K) a zsinórban? (**15 pont**)
(b) Mekkora eredő szélerő (F) hat a sárkányra? (**7 pont**)
(c) Mekkora és milyen irányú forgatónyomaték hat a farok nélküli sárkányra? (**8 pont**)

Megoldás:



(a) Az ábra jelöléseit használva írjuk föl a sárkányra ható vízszintes, illetve függőleges erők összegét *(7 pont)*:

X: $F\sin\alpha - K\cos\beta = 0$,

Y: $F\cos\alpha - K\sin\beta - mg = 0$.

Az első egyenletet osszuk el a másodikkal, és fejezzük ki a kötélerőt *(8 pont)*:

$$\frac{1}{\tan\alpha} = \tan\beta + \frac{mg}{K\cos\beta},$$

$$K = mg\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)} = 0,2\cdot 10\cdot\frac{\sin 30°}{\cos(30°+45°)} \approx 3,864\,\mathrm{N}.$$

(b) Az eredő szélerő az X irányra fölírt egyenletből *(7 pont)*:

$$F = K\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \approx 3,864\,\mathrm{N}\frac{\cos 45°}{\sin 30°} \approx 5,464\,\mathrm{N}.$$

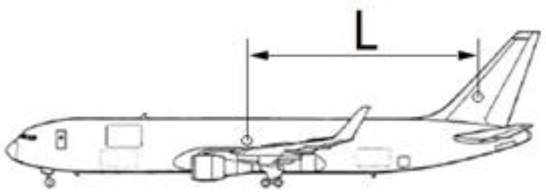
(c) Az erők forgatónyomatéka a C ponton átmenő tengelyre *(8 pont)*:

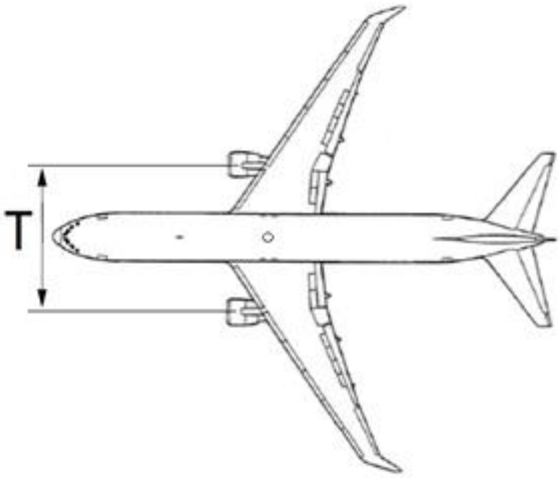
$$M = -Fc + mg\left(e\sin\alpha + c\cos\alpha\right),$$

$$M = -5,469\cdot 0,4 + 0,2\cdot 10\cdot\left(0,5\cdot\sin 30° + 0,4\cdot\cos 45°\right) \approx -0,993\,\mathrm{Nm}.$$

A nyomaték az óramutató járásával ellentétes irányban igyekszik elfordítani a farok nélküli sárkányt. (Ezt akadályozza meg a sárkány farka.)

7. Egy kéthajtóműves utasszállító repülőgép egyik hajtóművét leállították, ezért egy hajtóművel folytatja útját. Egyenes vonalban, vízszintesen, állandó sebességgel repül. Eközben az F_E légellenállás és az F_F felhajtóerő a repülőgép szimmetriasíkjában hat, a működő hajtómű súlypontra számított nyomatékát a függőleges vezérsíkon ébredő F_O oldalerő egyenlíti ki. A légellenállás és a súly aránya: $e = {F_E}/{G} = 1/25$. A hajtóművek középvonalának távolsága T = 16 m, a függőleges vezérsíkon ébredő oldalerő távolsága a súlyponttól L = 23 m. Mekkora α szöggel kell bedönteni a repülőgépet a hossztengelye körül ahhoz, hogy az oldalerő kompenzálva legyen, vagyis, hogy egyenes vonalú mozgást végezzen? **(25 pont)**



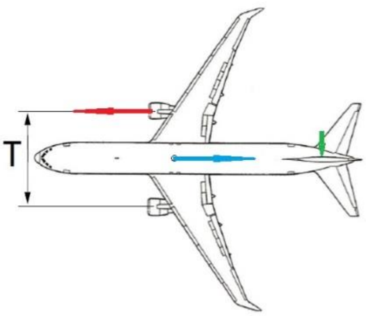


Megoldás:

A szükséges tolóerő a hosszirányú erők egyensúlyából:

$$F_T = F_E = e \cdot G \qquad \textit{(4 pont)}$$

A súlypontra vett nyomatékok egyensúlya fölülnézetben:



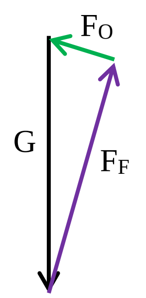
$$F_T \cdot \frac{T}{2} = F_O \cdot L \qquad \textit{(5 pont)}$$

Ebből az oldalerő:

$$F_O = F_T \cdot \frac{T}{2L} \qquad \textit{(3 pont)}$$

Bedöntés kiszámolása a felhajtóerő, az oldalerő és a súlyerő egyensúlyából. Szemből nézve:

$$F_O = G \cdot \sin\alpha \qquad \textit{(6 pont)}$$



Ebből:

$$\sin\alpha = \frac{F_O}{G} = e \cdot \frac{T}{2L} = \frac{1}{25} \cdot \frac{16}{2 \cdot 23} = 0{,}0139 \qquad \textit{(6 pont)}$$

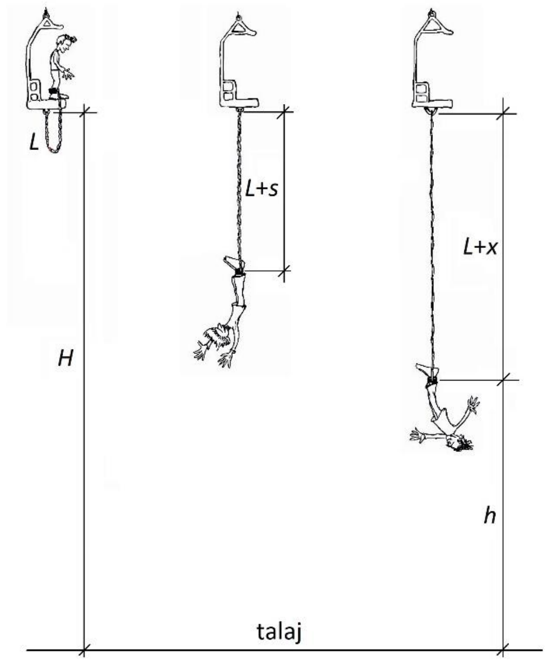
Amiből a szükséges dőlésszög:

$$\alpha = 0{,}8° \qquad \textit{(1 pont)}$$

8. A kötélugráskor egy gumikötél egyik végét az ugró ember lábfejéhez, a másikat egy magasan levő építményhez (kilátó, híd, felvonókabin) rögzítik. Miután az ugró a mélybe veti magát, ez a gumikötél akadályozza meg, hogy a talajba csapódjon. (A rajz nem méretarányos.)

Egy ugró tömege m = 60 kg, a gumikötél terheletlen hossza L = 10 m, rugómerevsége k = 200 N/m.

Az ugróhely talajtól mért magassága H = 30 m. Az ugró testmagassága e mellett elhanyagolható (az ugrót tekintsük a kötélvéghez erősített tömegpontnak). A gumikötél tömegét és a légellenállást is hanyagoljuk el. Az ugró kezdősebesség nélkül veti magát a mélybe, g = 10 m/s^2.



(a) A gumikötélen mozdulatlanul lógó ember súlya mennyivel nyújtja meg a gumikötelet (azaz mekkora a gumikötél statikus megnyúlása)? (**5 pont**)

(b) Mekkora az ugró legnagyobb esési sebessége? (**12 pont**)

(c) A leugrás után mekkora lesz az ugró és a talaj közti legkisebb távolság? (**13 pont**)

Megoldás:

(a) A kötél statikus megnyúlása *(5 pont)*:

$$ks = mg\,, \qquad s = \frac{mg}{k} = \frac{60\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{200\,\mathrm{N/m}} = 3\,\mathrm{m}\,.$$

(b) Az ugró sebessége addig nő, amíg a ráható súlyerő nagyobb a kötélerőnél. Ekkor a kötél megnyúlása éppen az $s = mg/k$ statikus megnyúlás. *(6 pont)*

A munkatétel erre az állapotra, és ebből a maximális esési sebesség *(6 pont)*:

$$mg(L+s) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ks^2\,, \qquad 2g(L+s) = v^2 + k/ms^2\,, \qquad v^2 = 2g(L+s) - k/ms^2\,,$$

$$v = \sqrt{2\cdot 10\cdot(10+3) - 200/60\cdot 3^2}\ \mathrm{m/s} = \sqrt{230}\ \mathrm{m/s} \approx 15{,}17\,\mathrm{m/s}\,.$$

(c) A zuhanás végén, az esés legalsó pontjában a kötélben tárolt rugalmas energia egyenlő az ugró helyzeti energiájának megváltozásával. *(3 pont)*:

A kötél megnyúlása ebben a pillanatban legyen x. Az ugró esési útja ekkor $L + x$. A munkatétel erre az állapotra, és ebből a kötél megnyúlása *(6 pont)*:

$$mg(L+x) = \frac{1}{2}kx^2\,, \qquad x^2 - 2\frac{mg}{k}x - 2\frac{mg}{k}L = 0\,, \qquad x^2 - 2sx - 2sL = 0\,,$$

$$D = \sqrt{4s^2 + 8sL} = 2\sqrt{s^2 + 2sL}\,, \qquad D = 2\sqrt{3^2 + 2\cdot 3\cdot 10}\ \text{méter} \approx 16{,}61\,\mathrm{m}\,,$$

$$x = \frac{1}{2}(2s + D) = s + \frac{D}{2}\,, \qquad x = 3\,\mathrm{m} + \frac{16{,}61\,\mathrm{m}}{2} \approx 11{,}31\,\mathrm{m}\,.$$

A talajtól mért legkisebb távolság *(4 pont)*:

$$h = H - L - x = 30\,\mathrm{m} - 10\,\mathrm{m} - 11{,}31\,\mathrm{m} \approx 8{,}693\,\mathrm{m}\,.$$

9. Az idősödő cowboy reumás vállát fájlalva aggódik, hogy a 3,5 kg tömegű puskája – amely a 21 grammos lövedéket 900 m/s sebességgel képes kilőni – túl erősen „rúg hátra". Arra gondol, hogy ezen talán úgy lehetne segíteni, ha a puska csövének a felét ismert szokás szerint lefűrészelné. A lefűrészelt csődarab 0,5 kg. Mekkora sebességgel lökődik hátra elsütéskor a puska

a) a puska eredeti állapotában? **(8 pont)**

b) illetve a lefűrészelés után? **(17 pont)**

Tételezzük fel, hogy a puskacsőben az elégő puskapor állandó nyomással, így állandó nagyságú gyorsítóerővel repíti ki a lövedéket, amely erő munkavégzése teljes egészében a golyó felgyorsítását fedezi! A számolás során csak a fegyver és lövedék tömegét tekintsük (ne vegyük figyelembe például a puskát tartó kart stb.).

(Megjegyzés: Mivel a puska sokkal nagyobb tömegű, mint a lövedék, így a visszalökődő puska mozgási energiája sokkal kisebb, mint a kirepülő lövedéké, tehát ez az energia elhanyagolható. Szintén elhanyagolható a lövedék előtt a puskacsőben feltorlódó levegőn végzett munkavégzés. Így tehát jó közelítés, hogy a gáz munkavégzése teljes egészében a lövedék gyorsítására fordítódik.)

Megoldás:

A lövedék tömege és kirepülési sebessége: m_l = 0,021 kg, v_l = 900 m/s.

(a) A puska tömege ekkor m_p = 3,5 kg.

A lendület-megmaradás törvénye szerint:

$$0 = m_l \cdot v_l + m_p \cdot v_p ,$$ *(6 pont)*

amiből: $$v_p = -\frac{m_l \cdot v_l}{m_p} = -\frac{0,021 \cdot 900}{3,5} = -5,4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} .$$ *(2 pont)*

Tehát a puska (eredeti állapotában) 5,4 m/s sebességgel lökődik hátra.

(b) A lefűrészelt csövű puska tömege ekkor m_p = 3 kg *(1 pont)*. Mivel a gyorsítóerőt állandó nagyságúnak tekinthetjük, így a munkavégzése az l hosszúságú puskacsőben:

$$W = F \cdot l ,$$

amely feltevésünk szerint teljes egészében a lövedék mozgási energiájára fordítódik:

$$\frac{1}{2} m_l \cdot v_l^2 = F \cdot l .$$ *(5 pont)*

A lefűrészelt csövű puska esetén jelölje w_l a lövedék, w_p pedig a hátralökődő puska sebességét.

Ha a puskacső hossza felére rövidül, akkor a munka felére csökken, így a lövedék w_l sebességre:

$$\frac{1}{2} m_l \cdot w_l^2 = F \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_l \cdot v_l^2\right),$$ *(6 pont)*

amiből: $$w_l = \frac{v_l}{\sqrt{2}} = 636,4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$ *(1 pont)*

Használjuk újra a lendület-megmaradás törvényét:

$$0 = m_l \cdot w_l + m_p \cdot w_p ,$$ *(3 pont)*

amiből: $$w_p = -\frac{m_l \cdot w_l}{m_p} = -\frac{0,021 \cdot 636,4}{3} = -4,45\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} .$$ *(1 pont)*

Tehát a lefűrészelt csövű puska 4,45 m/s sebességgel lökődik hátra.

10. Egy henger alakú, kis keresztmetszetű gyertyát meggyújtva azt tapasztaljuk, hogy egyenletesen ég és egy óra alatt hossza 2,5 cm-rel rövidül meg. Egy ugyanolyan gyertyát alul nehezékkel megterhelve az vízben függőleges helyzetben úszik, és a vízből 2,5 cm hosszúságú darab áll ki. A vízen úszó gyertyát meggyújtva az mennyi ideig éghet kellő kezdő hosszúság esetén? A gyertya anyagának sűrűsége 0,8 g/cm^3. (Feltételezzük, hogy a gyertya az égés ellenére végig hengeres alakú marad.) **(20 pont)**

Megoldás:

Jelölések és adatok: $t = 1$ h; $\ell = 2{,}5$ cm; $\rho_{gy} = 0{,}8$ g/cm^3; $\rho_v = 1$ g/cm^3 (*2 pont*); a nehezék tömege m, a gyertya keresztmetszete A, kezdeti hossza L, hossza a gyertya elalvásakor L', $T = ?$

Ha ismernénk a gyertya kezdeti L hosszának és az elalváskori L' hosszának különbségét, akkor az óránkénti 2,5 cm elégett hosszból könnyen meghatározhatnánk az égés idejét. Az úszás feltételének egyenletében szerepel a gyertya hossza, ezért írjuk fel azt mind az égés kezdetére, mind a végére:

$$A(L-\ell)\rho_v g = AL\rho_{gy} g + mg \quad (6\ pont)$$

$$AL'\rho_v g = AL'\rho_{gy} g + mg \quad (6\ pont)$$

A bal oldalakon figyelembe vettük, hogy a gyertya vízbe merülő hossza kezdetben a teljes hossznál ℓ-lel kevesebb, a láng elalvásakor pedig a teljes hosszal egyenlő. Vonjuk ki egymásból a két egyenletet (továbbá A-val és g-vel való egyszerűsítés után):

$$(L-L')\rho_v - \ell\rho_v = (L-L')\rho_{gy}. \quad (2\ pont)$$

Ebből könnyen adódik az elégett hossz:

$$L - L' = \ell\frac{\rho_v}{\rho_v - \rho_{gy}} = 2{,}5\ \text{cm}\frac{1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} - 0{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 12{,}5\ \text{cm}. \quad (2\ pont)$$

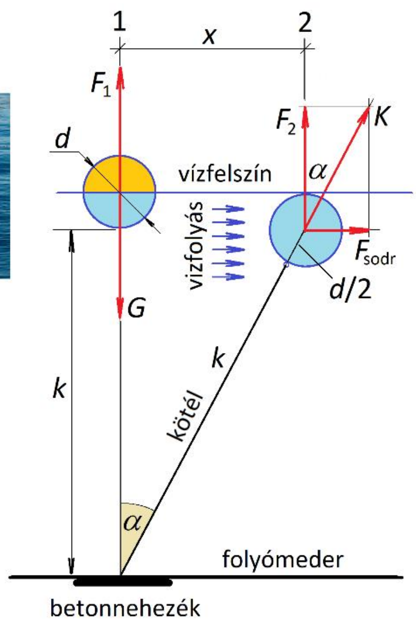
Az égés ideje pedig: $T = t\frac{L-L'}{\ell} = 1\ \text{óra}\,\frac{12{,}5\ \text{cm}}{2{,}5\ \text{cm}} = \underline{\underline{5\ \text{óra}}}$ (*2 pont*).

11. Egy gömbalakú, d = 1 m átmérőjű bója állóvízben lebegve félig merül el (1-es állapot).

A víz sűrűsége ρ= 1000 kg/m^3.

g = 10 m/s^2.

(a) Mekkora a bója tömege? (**5 pont**)



Egy ilyen bója k = 10 m hosszú acélkötéllel van egy gyorssodrású folyó medrében elhelyezett betonnehezékhez rögzítve az ábra szerint. Az 1-es állapotban a bója félig merül a vízbe, a kötél függőleges. Az acélkötél tömegét hanyagoljuk el.

A bóját a folyóvíz áramlása oldalra sodorja, miközben a kötél ferdén lefelé húzza. A 2-es állapotban a bója teteje a vízfelszín magasságában van. Az acélkötélre ható közegellenállási erőt hanyagoljuk el.

(b) Mekkora a bója vízszintes elmozdulása (x) az 1→2 állapot között? (**5 pont**)
(c) Mekkora vízszintes sodrási erő hat a bójára a 2-es helyzetben? (**5 pont**)
(d) Mekkora erő ébred a kötélben a 2-es helyzetben? (**5 pont**)

Megoldás:
(a) Az 1-es helyzetben a bója lebeg, így a súlya egyenlő az F_1 felhajtóerővel. A felhajtóerő egyenlő a kiszorított víz súlyával. A kiszorított víz térfogata a bója térfogatának fele. A bója térfogata és tömege *(2 + 3 pont)*:

$$V = \frac{d^3\pi}{6} = \frac{1^3\pi}{6} \approx 0{,}524\,\mathrm{m}^3, \qquad m = V/2\rho = 0{,}524/2 \cdot 1000 \approx 261{,}8\,\mathrm{kg} \approx 262\,\mathrm{kg}.$$

(b) A kötél függőlegessel bezárt szöge az ábra alapján *(2 pont)*:

$$\cos\alpha = \frac{k}{k+d/2} = \frac{10}{10+0{,}5} \approx 0{,}9524, \qquad \alpha \approx 17{,}75°.$$

A bója vízszintes elsodródása *(3 pont)*:

$$x = \left(k + d/2\right)\sin\alpha = 10{,}5 \cdot \sin 17{,}75° \approx 3{,}202\,\mathrm{m}.$$

(c) A 2-es állapotban a bójára ható felhajtóerő megegyezik a bója súlyával: $F_2 = G$. A bójára ható vízszintes sodrási erő *(5 pont)*:

$$F_{\mathrm{sodr}} = G\tan\alpha = mg\tan\alpha = 2618 \cdot \tan 17{,}75° \approx 838\,\mathrm{N}.$$

(d) A kötélben ébredő erő *(5 pont)*:

$$K = \frac{G}{\cos\alpha} = \frac{2618}{\cos 17{,}75°} \approx 2749\,\mathrm{N}.$$

12. Egy vékony üvegcsőben higanyszál van. Ha végeire 0,4 V feszültséget kapcsolunk, akkor 5 A erősségű áram folyik benne. A higanyt áttöltjük egy olyan üvegcsőbe, aminek átmérője az eredetinek harmada, és ismét 0,4 V feszültséget kapcsolunk a végeire. Mekkora lesz így az áramerősség? **(20 pont)**

Megoldás:
Jelölések és adatok: $U = 0{,}4$ V; $I_1 = 5$ A; a „vastag" higanyszál átmérője d_1, keresztmetszete A_1, hossza ℓ_1, a vékonyabb higanyszál adatai $d_2 = d_1/3$ (*2 pont*), A_2 és ℓ_2, a higany fajlagos ellenállása ρ. $I_2 = ?$
Az első („vastag") higanyszál ellenállása felírható kétféleképpen: a mérhető elektromos adatokból, illetve a geometriai adatokból a fajlagos ellenállás használatával:

$$R_1 = \frac{U}{I_1} = \rho\frac{\ell_1}{A_1} \text{ (4 pont)}.$$

Hasonló igaz a második higanyszálra is:

$$R_2 = \frac{U}{I_2} = \rho\frac{\ell_2}{A_2} \text{ (4 pont)}.$$

Az átmérők kapcsolatából a keresztmetszetekre a következő nyerhető: $A_2 = A_1/3^2$ (*2 pont*), és mivel a higany térfogata ugyanaz maradt, a kilencszer kisebb átmérőhöz kilencszer nagyobb hosszúság tartozik: $\ell_2 = 3^2\ell_1$ (*4 pont*). Ezzel folytatva a második egyenletet:

$$\frac{U}{I_2} = \rho\frac{\ell_2}{A_2} = \rho\frac{3^2\ell_1}{A_1/3^2} = 3^4\rho\frac{\ell_1}{A_1} = 3^4\frac{U}{I_1} \text{ (2 pont)}.$$

Ebből következően az áramerősség az átmérő negyedik hatványával arányosan változik, tehát a harmadára csökkenő átmérő miatt $I_2 = \frac{I_1}{3^4} = \frac{5\,\mathrm{A}}{81} = 0{,}0617\,\mathrm{A} = \underline{61{,}7\,\mathrm{mA}}$ (*2 pont*).

13. Egy elektromos vasalót és egy elektromos fűtőtestet párhuzamosan összekapcsolunk, és 230 V feszültségű áramforrással működtetjük őket. Ekkor a vasaló teljesítménye 530 W, a fűtőtesté 2100 W.
Mekkorák lesznek a teljesítmények, ha sorba kapcsoljuk őket, és az áramforrás feszültségét 400 V-ra változtatjuk? **(20 pont)**

Megoldás:

Jelölések és adatok: a vasaló ellenállása R_v; a fűtőtesté R_f; a párhuzamos kapcsolás az 1. eset, az azzal kapcsolatos adatok az 1 indexet viselik:
U_1 = 230 V; P_{v1} = 530 W; P_{f1} = 2100 W; a vasalón átfolyó áram I_{v1}; a fűtőtesten I_{f1}; a rajtuk eső feszültség azonos: U_1 (*2 pont*).
A soros kapcsolás a 2. eset, az azzal kapcsolatos adatok a 2 indexet viselik:
U_2 = 400 V; a vasalón eső feszültség U_{v2}; a fűtőtesten U_{f2}; a rajtuk átfolyó áram azonos: I_2 (*2 pont*); P_{v2} = ?; P_{f2} = ?

A megadott feszültségi és teljesítményadatokból meg lehet kapni a fogyasztók ellenállását:

$$R_\mathrm{v} = \frac{U_1^2}{P_\mathrm{v1}} = \frac{(230\ \mathrm{V})^2}{530\ \mathrm{W}} = 99{,}8\ \Omega \ (\textit{4 pont})$$
$$R_\mathrm{f} = \frac{U_1^2}{P_\mathrm{f1}} = \frac{(230\ \mathrm{V})^2}{2100\ \mathrm{W}} = 25{,}2\ \Omega \ (\textit{2 pont})$$

A 2. (soros) kapcsolás eredő ellenállása $R_\mathrm{e2} = R_\mathrm{v} + R_\mathrm{f} = 99{,}8\ \Omega + 25{,}2\ \Omega = 125{,}0\ \Omega$ (*2 pont*), melynek segítségével a két fogyasztón átfolyó áram

$$I_2 = \frac{U_2}{R_\mathrm{e2}} = \frac{380\ \mathrm{V}}{125{,}0\ \Omega} = 3{,}040\ \mathrm{A} \ (\textit{2 pont})$$

Most már megkaphatjuk a végeredményeket:

$$P_\mathrm{v2} = I_2^2 R_\mathrm{v} = (3{,}040\ \mathrm{A})^2 99{,}8\ \Omega = \underline{\underline{922{,}3\ \mathrm{W}}} \ (\textit{4 pont}),$$
$$P_\mathrm{f2} = I_2^2 R_\mathrm{f} = (3{,}040\ \mathrm{A})^2 25{,}2\ \Omega = \underline{\underline{232{,}9\ \mathrm{W}}} \ (\textit{2 pont}).$$

14. Vizet melegítünk egy P = 2000 W-os vízforralóval. Az m_0 = 1,5 kg tömegű víz egy nyitott edényben van, kezdő hőmérséklete T_0 = 20°C.
A víz fajhője c = 4183 J/kg/°C, forráspontja T_{forr} = 100°C, forráshője L = 2,26 MJ/kg.
Tételezzük föl, hogy elhanyagolható az edény hőkapacitása, a hőveszteség és a forráspont eléréséig elpárolgó víz tömege.

(a) A bekapcsolást követően mennyi idő után kezd forrni a víz? (**6 pont**)

(b) A bekapcsolástól számítva mennyi idő telne el a teljes vízmennyiség elpárolgásáig, ha nem kapcsolnánk ki a készüléket? (**6 pont**)

(c) Hogy függ az edényben levő víz hőmérséklete az időtől? Ábrázolja a függvényt. (**6 pont**)

(d) Hogy függ az edényben levő víz belsőenergiájának változása az időtől? Ábrázolja a függvényt. (**12 pont**)

Megoldás:

(a) A $t = 0$ pillanatban kezdjük melegíteni a vizet. t idő elteltével a víz hőmérséklete legyen T. A villamos teljesítmény által addig keltett termikus energia a víz belsőenergiáját növeli: *(3 pont)*:

$$Pt = \Delta U = cm_0\left(T - T_0\right).$$

Innen a T_{forr} forráspont eléréséhez szükséges idő *(3 pont)*:

$$t_{forr} = \frac{cm_0\left(T_{forr} - T_0\right)}{P}, \qquad t_{forr} = \frac{4183 \times 1{,}5 \times (100 - 20)}{2000} \approx 251\,\mathrm{s} \approx 4\ \mathrm{perc}.$$

(b) A forráspont elérése után a víz hőmérséklete nem változik, a vízforraló által keltett termikus energia a vizet kezdi párologtatni. A melegítés kezdetétől számított t pillanatig elpárolgott (gőzzé alakult) víz tömege *(2 pont)*:

$$m_g = \frac{P\left(t - t_{forr}\right)}{L}, \qquad t > t_{forr}.$$

A teljes víztömeg elpárologtatásának időpillanata *(4 pont)*:

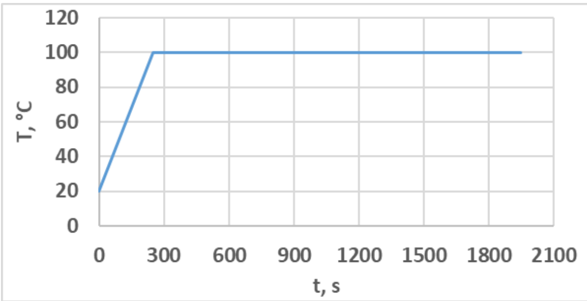
$$P\left(t_{pár} - t_{forr}\right) = Lm_0, \qquad t_{pár} = t_{forr} + \frac{Lm_0}{P},$$

$$t_{pár} \approx 251\,\mathrm{s} + \frac{2{,}26 \times 10^6 \times 1{,}5}{2000}\,\mathrm{s} = 1946\ \mathrm{s} \approx 32\ \mathrm{perc}.$$

(c) A víz hőmérséklete a $t_0 = 0$ pillanatban $T_0 = 20$°C. $t_{forr} = 251$ s múlva éri el a $T_{forr} = 100$°C-ot. Közben a hőmérséklet az idő lineáris függvénye *(6 pont)*:

$$Pt = cm_0\left(T - T_0\right), \qquad T = T_0 + \frac{P}{cm_0}t.$$

Ezután a hőmérséklet állandó marad az utolsó csepp elpárolgásáig ($t_{pár} = 1946$ s-ig).



(d) Az edényben levő víz belsőenergiájának megváltozása a $t = 0$ pillanatban $\Delta U = 0$ *(2 pont)*. A forráspont elérése előtt az idő lineáris függvénye:

$$\Delta U = Pt, \quad \text{ha} \quad 0 \le t \le t_{forr}.$$

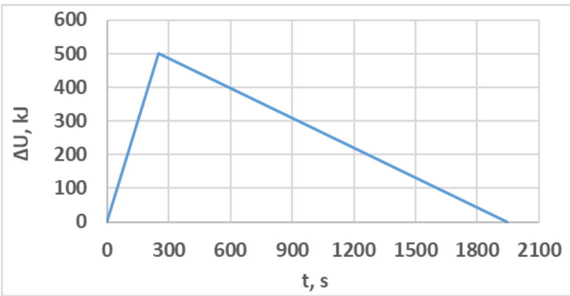
A forráspont pillanatában a legnagyobb *(2 pont)*:

$$\Delta U_{forr} = Pt_{forr} = 2000\,\mathrm{W} \cdot 251\,\mathrm{s} \approx 502\,\mathrm{kJ}.$$

A forráspont elérése után az edényben maradt víz hőmérséklete állandó, de a tömege csökken *(5 pont)*:

$$m = m_0 - m_g = m_0 - \frac{P\left(t - t_{forr}\right)}{L}.$$

Az edényben maradó víz belsőenergiája azért csökken, mert a tömege csökken:



$$\Delta U = cm\left(T_{forr} - T_0\right) = cm_0\left(T_{forr} - T_0\right) + \frac{P\left(T_{forr} - T_0\right)}{L}t_{forr} - \frac{P\left(T_{forr} - T_0\right)}{L}t, \quad \text{ha} \quad t_{forr} < t \le t_{pár}.$$

Ez egy negatív meredekségű egyenes.

Ha $t = t_{pár}$, az edényben nem marad víz, tehát a belsőenergia változás zérus. *(3 pont)*