Szakács Jenő Megyei Fizikaverseny

2022/2023. tanév

II. forduló

Megoldások

2023. február 13.

Neumann János matematikus (1903-1957) a XX. században az évszázad embere, a magyar tudomány géniusza, aki a játékelméletet, atomfizikát, numerikus meteorológiát megalapozó elméletek kidolgozása mellett a mai számítógép működési elvének kitalálója, az informatika emberre és társadalomra való hatásvizsgálatainak elindítója. A 2023-as esztendőt születése 120 éves évfordulójaként Neumann Emlékév rendezvénysorozattal ünnepli az ország, melyhez a Neumann János Egyetem támogatásával a Szakács Jenő Megyei Fizikaverseny is csatlakozott.

Ezért néhány feladat közvetlenül vagy közvetve kapcsolódik Neumann János életéhez, munkásságához.

*Minden versenyzőnek a számára (az alábbi táblázatban) kijelölt **négy** feladatot kell megoldania. Azoknak a tanulóknak, akik nem gimnáziumi rendszerben tanulnak fizikát, az **A** feladatsort kell megoldaniuk.*

A rendelkezésre álló idő 180 perc. A feladatok megoldásait önállóan kell elkészítenie, függvénytáblázat és számológép használható. Minden feladatot külön lapon oldjon meg!
A feladatok különböző pontértékűek és az egyes kategóriákban elérhető maximális pontszámok is eltérőek.

A gimnazisták feladatai		*A szakközépiskolások feladatai*	
***9.** osztály*	**1., 6., 10., 12** *(55 pont)*	***A.***	**1., 3., 10., 12.** *(60 pont)*
***10.** osztály*	**1., 3., 4., 10.** *(60 pont)*		
***11.** osztály*	**2., 7., 8., 11.** *(50 pont)*		
***12.** osztály*	**5., 8., 9., 13.** *(60 pont)*		

Azokban a feladatokban, ahol erre az adatra szükség van, vegye a földfelszíni gravitációs gyorsulás értékét **10 m/s^2**-*nek (hacsak a feladat nem ad meg más értéket)!*

Jó munkát kíván

a versenybizottság

❄❄❄

1. Neumann János gondolkodási sebességének elképesztő gyorsaságáról mindenki, aki személyesen ismerte őt, megemlékezett. A Nobel-díjas Wigner Jenő ezt mondta róla: „Sok nagy tudóssal találkoztam életemben, nagyon sokkal… Nem ismerek senkit, aki olyan gyors, oly éles eszű lett volna, mint Neumann János.” Az egyik legtöbbet emlegetett anekdota ezzel kapcsolatosan a híres legyes feladat, amit manapság is gyakran kitűznek fizikai problémaként középiskolában:

„20 km távolságban levő két kerékpáros – nevezzük őket Adélnak és Bélának – elindul egymás felé mindkettő állandó 10 km/h sebességgel haladva. Ugyanakkor egy 15 km/h sebességgel haladó légy is elindul Adél biciklijének első kerekétől Béla felé, annak első kerekéig, majd azonnal megfordul és Adél biciklijének első kerekére repül és ezt folytatja ide-oda, míg a két kerékpár első kerekei össze nem nyomják. Kérdés: milyen hosszú utat tett meg a légy?”

Mivel a kérdés a légy útjára vonatkozik, így első gondolata az lehet az embernek, hogy számítsuk ki, mennyi utat tesz meg a légy addig, amíg Adél első kerekétől elér Béla első kerekéig. Majd számítsuk ki, hogy miután megfordul, mennyi utat tesz meg, amíg visszajut Adél első kerekéig, és így tovább egészen addig, amíg találkoznak, vagyis lényegében a légy által megtett – végtelen sok! - útszakasz összegzésével jutnánk el a megoldáshoz. A feladat érdekessége, hogy van egy nagyon egyszerű, frappánsan rövid gondolatmenet, amivel szintén eljuthatunk a helyes válaszhoz.
Mikor Neumann Jánosnak feltették ezt a kérdést, Neumann néhány másodperc alatt megoldotta a feladatot csalódást okozva a kérdezőnek, aki erre így reagált: „Ó, Ön bizonyára ismerte a trükköt!”. Mire Neumann azt felelte: „Miféle trükköt? Én csak összegeztem a végtelen sort.”

(a) Oldja meg a feladatot „trükkösen”, azaz az útszakaszok összegzése nélkül! **(5 pont)**

(b) Adjon meg egy közelítő eredményt a kérdésre! A légy egyes repülési szakaszainak hosszát jelölje L_n, azaz L_1 az első repülési szakaszának (míg Adél kerekéről Béla kerekére száll) hossza, L_2 a második repülési szakaszának (míg Béla kerekéről Adél kerekére visszaszáll) hossza, és így tovább. Határozza meg az első négy repülési szakasz hosszát (tehát L_1, L_2,… L_4 értékeket) számszerűen, majd ezek összegét tekintse közelítő végeredménynek! Az első négy repülési hossz alapján tudna megfogalmazni sejtést a repülési szakaszok hosszai között (pl. hogy az egymást követő repülési szakaszok hosszai között milyen kapcsolat van)? **(15 pont)**

<u>Megoldás:</u>

(a) Mindkét kerékpáros 10 km/h sebességgel halad egymás felé, azaz a relatív sebességük 20 km/h *(2 pont)*, így nyilván a 20 kilométeres szakaszon 1 óra múlva találkoznak *(1 pont)*. Mivel a légy ezen idő alatt folyamatosan repül és sebessége állandó 15 km/h, így 1 óra alatt 15 kilométert tesz meg. *(2 pont)*

(b) A kerékpárosok sebessége $v = 10\ \mathrm{km/h}$, a légy repülési sebessége pedig $v_l = 15\ \mathrm{km/h}$.
A két biciklis kezdeti távolsága D = 20 km.
A légy az első repülési szakasza során a légy és az egyik biciklis (aki felé éppen a légy tart, jelen esetben Béla) $(v_l + v)$ sebességgel közelednek egymáshoz, így a légy első repülése előtt a kerékpárosok közötti aktuális $D_1 = D$ távolság megtétele során a repülési idő:

$D_1 = (v_l + v)\cdot t_1$, azaz $t_1 = \dfrac{D_1}{v_l + v} = \dfrac{20\text{ km}}{15\text{ km/h}+10\text{ km/h}} = 0{,}8\text{ h}$. *(1 pont)*

Ezen idő alatt a légy:

$L_1 = v_l \cdot t_1 = 15\text{ km/h} \times 0{,}8\text{ h} = 12\text{ km}$. *(1 pont)*

távolságot tesz meg, tehát ennyi az első repülési szakasz hossza.

Ezen t_1 időtartam alatt a kerékpárosok $2\cdot v\cdot t_1$ utat tesznek meg egymás felé, tehát ennyivel kerülnek közelebb egymáshoz, így a légy második repülése előtti D_2 távolságuk:

$D_2 = D_1 - 2\cdot v\cdot t_1 = 20\text{ km} - 2\cdot 10\text{ km/h}\cdot 0{,}8\text{ h} = 4\text{ km}$. *(1 pont)*

Innentől kezdve a fentebbi (első repülési szakaszra) leírt számolással kapjuk, hogy:

$$t_2 = \frac{D_2}{v_l + v} = \frac{4\text{km}}{15\text{km/h} + 10\text{km}/h} = 0{,}16\text{h} = 0{,}16\text{ óra}$$

és

$L_2 = v_l \cdot t_2 = 15\text{ km/h}\cdot 0{,}16\text{ h} = 2{,}4\text{ km}$ *(3 pont)*

távolságot tesz meg, tehát ennyi a második repülési szakasz hossza.

Teljesen azonos számolásokkal kapjuk, hogy:

$D_3 = D_2 - 2\cdot v\cdot t_2 = 4\text{ km} - 2\times 10\text{ km/h}\times 0{,}16\text{h} = 0{,}8\text{ km}$,

$$t_3 = \frac{D_3}{v_l + v} = \frac{0{,}8\text{ km}}{15\text{ km/h} + 10\text{ km/h}} = 0{,}032\text{ h} = 0{,}032\text{ óra},$$

$L_3 = v_l \cdot t_3 = 15\text{ km/h}\times 0{,}032\text{ h} = 0{,}48\text{ km}$ *(3 pont)*

és

$D_4 = D_3 - 2\cdot v\cdot t_3 = 0{,}8\text{ km} - 2\times 10\text{ km/h}\times 0{,}032\text{ h} = 0{,}16\text{ km}$,

$$t_4 = \frac{D_4}{v_l + v} = \frac{0{,}16\text{ km}}{15\text{ km/h} + 10\text{ km/h}} = 0{,}0064\text{ h},$$

$L_4 = v_l \cdot t_4 = 15\text{km/h}\times 0{,}0064\text{h} = 0{,}096\text{km}$. *(3 pont)*

Ezek alapján a légy teljes repülési távolságának becslése:

$L \cong L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 12\text{ km} + 2{,}4\text{ km} + 0{,}48\text{ km} + 0{,}096\text{ km} = 14{,}976\text{ km}$.

Tehát a légy teljes repülési távolságára nagyjából 15 km adódik becslésként.

A fenti számszerű eredmények alapján látható, hogy a következő repülési szakasz hossza ötöde az előző hossznak, tehát a sejtésünk:

$L_{n+1} = L_n \cdot \dfrac{1}{5}$, *(1 pont)*

ami lényegében egy rekurzív képlet, amely egy mértani sorozatot ad meg:

$L_n = L_1 \cdot q^{(n-1)}$, *(1 pont)*

ahol a kvóciens:

$q = \dfrac{1}{5}$. *(1 pont)*

(Ez alapján a teljes távolságra tett 15 km érték a mértani sor összegképletének felhasználásával egzaktul igazolható.)

❄❄❄

2. Andrea egy 1,3 cm belső átmérőjű kerti slagot csatlakoztatott a 9. emeleti kollégiumi szobájában lévő csaphoz, a másik végét pedig a talajtól számított 24 m magasan lévő ablakpárkányra helyezte. (a) Mekkora térfogatáram szükséges a vízcsapból ahhoz, hogy le tudja locsolni az ablaka alatt éjszaka hangoskodó embereket? A csendháborítók az ablak alatt állnak, vízszintes távolságban 10 m-re az épülettől, Andrea a vizet vízszintesen locsolja, szél nincs. [A csap (és egyben a locsolócső) térfogatárama a vízhozam jellemzője, ami térfogattal adja meg egy időegység alatt kifolyt vizet (a kifolyt víz tömege is egyértelmű jellemzője lehetne az áramlásnak, ezt tömegáramnak nevezik). A térfogatáramot gyakran q_V-vel jelölik, és egyenesen arányos mind az áramlás sebességével, mind a cső keresztmetszetével.] (b) Hol állhatnak a hangoskodók, hogy Andrea 45°-os emelkedési szög alatt tartott slaggal tudja őket lelocsolni, ha a csap térfogatárama 0,7 ℓ/s? (c) Milyen magasan kellene lennie a locsolócső végének ahhoz, hogy az (a) és a (b) rész további adottságai mellett ugyanolyan távolra lehessen locsolni? **(15 pont)**

Megoldás:

Jelölések: d = 1,3 cm, h_{ab} = 24 m, s_a = 10 m, q_{Va} = ?, q_{Vb} = 0,7 ℓ/s, s_b = ?, h_c = ?

A térfogatáram egyenesen arányos mind az áramlás sebességével, mind a cső keresztmetszetével: $q_V = A\,v$. Ha kérdés a térfogatáram, és a víz sebessége meghatározható, a válasz az előbbi formulából adódik. A mi esetünkben a keresztmetszet végig azonos:

$A = \frac{d^2\pi}{4} = \frac{(1{,}3\ \mathrm{cm})^2\pi}{4} = 1{,}327\ \mathrm{cm}^2$ *(1 pont)*.

(a) A vízszintes locsolócsőből induló víz vízszintes hajítást szenved el, és mivel a megtett függőleges út ismert, ebből származtatható a mozgás ideje:

$$t_a = \sqrt{\frac{2\,h_{ab}}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 24\ \mathrm{m}}{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 2{,}191\ \mathrm{s} \qquad \textit{(1 pont)}.$$

Az oldalirányú elmozdulásra is ennyi idő áll rendelkezésre, ezért a kezdősebesség, ami vízszintes irányú, a következő lesz:

$$v_a = \frac{s_a}{t_a} = \frac{10\ \mathrm{m}}{2{,}19\ \mathrm{s}} = 4{,}564\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \textit{(1 pont)},$$

és ebből a térfogatáram

$$q_{Va} = A\,v_a = 1{,}327\ \mathrm{cm}^2\cdot 4{,}564\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}327\cdot 10^{-2}\ \mathrm{dm}^2\cdot 45{,}64\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{0{,}606\ \frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{s}}}}\ \textit{(2 pont)}.$$

(b) A feladat fordított: adott térfogatáramból határozzuk meg a kezdősebességet, amiből pedig – a slag irányának ismeretében – adódik a mozgás távolsága:

$$v_b = \frac{q_{Vb}}{A} = \frac{0{,}7\ \frac{\ell}{\mathrm{s}}}{1{,}327\ \mathrm{cm}^2} = \frac{0{,}7\ \frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{s}}}{1{,}327\cdot 10^{-2}\ \mathrm{dm}^2} = 52{,}74\ \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{s}} = 5{,}274\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ \textit{(2 pont)}.$$

Mivel 45°-os emelkedési szög alatt tartjuk a csővéget, a kezdősebesség függőleges és vízszintes összetevője azonos nagyságú lesz:

$$v_{bx} = v_{by} = \frac{\sqrt{2}}{2}v_b = \frac{\sqrt{2}}{2}5{,}274\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3{,}729\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \textit{(1 pont)}.$$

Függőlegesen fölfelé indul a víz, míg a gyorsulása, és a mozgás végéig az elmozdulása lefelé történik, ez indokolja az előjeleket a következő összefüggésben

$$h_{ab} = \frac{g}{2}t_b^2 - v_{by}t_b \qquad \textit{(1 pont)},$$

melyből a mozgás ideje (a negatív gyököt kizárva):

$$t_\mathrm{b} = \frac{v_{\mathrm{b}y} + \sqrt{v_{\mathrm{b}y}^2 + 2\,g\,h_\mathrm{ab}}}{g} = \frac{3{,}729\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \sqrt{\left(3{,}729\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + 2\cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 24\ \mathrm{m}}}{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 2{,}595\ \mathrm{s}$$

(1 pont),

és a vízszintesen megtett út:

$$s_\mathrm{b} = v_{\mathrm{b}x}\,t_\mathrm{b} = 3{,}729\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 2{,}60\ \mathrm{s} = \underline{\underline{9{,}68\ \mathrm{m}}} \qquad \textit{(1 pont)}.$$

Annak ellenére, hogy nőtt a kezdősebesség az (a) részhez képest, és a cső állásszöge 45° lett, a locsolás távolsága csökkent, mert csak azonos indulási és érkezési szintek esetén igaz az, hogy a 45° alatt indított hajítás maximális távolságú.

(c) Az ismeretlen h_c kezdőmagasságból induló mozgás ideje nem feltétlenül azonos az (a) és a (b) kezdőkörülmények között. Az előbbiét jelöljük t_ca-val, az utóbbiét t_cb-vel.

A vízszintes elmozdulások azonosak:

$$s_\mathrm{c} = v_\mathrm{a}\,t_\mathrm{ca} = v_{\mathrm{b}x}\,t_\mathrm{cb} \qquad \textit{(1 pont)},$$

és a függőlegesek is:

$$h_\mathrm{c} = \frac{g}{2}t_\mathrm{ca}^2 = \frac{g}{2}t_\mathrm{cb}^2 - v_{\mathrm{b}y}t_\mathrm{cb} \qquad \textit{(1 pont)}.$$

A fenti két egyenlőségsor utolsó egyenlőségei kétismeretlenes egyenletrendszert alkotnak a két mozgás időtartamaira (amiket t_ca-val és t_cb-vel jelöltünk) nézve.

Fejezzük ki az előbbiből az egyik ismeretlent:

$$t_\mathrm{cb} = \frac{v_\mathrm{a}}{v_{\mathrm{b}x}}\,t_\mathrm{ca}.$$

Helyettesítsük be a másodikba

$$\frac{g}{2}t_\mathrm{ca}^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{v_\mathrm{a}}{v_{\mathrm{b}x}}\,t_\mathrm{ca}\right)^2 - v_{\mathrm{b}y}\frac{v_\mathrm{a}}{v_{\mathrm{b}x}}\,t_\mathrm{ca}.$$

Rendezhetjük az egyismeretlenessé vált egyenletet:

$$\frac{g}{2}\left(\left(\frac{v_\mathrm{a}}{v_{\mathrm{b}x}}\right)^2 - 1\right)t_\mathrm{ca}^2 = v_{\mathrm{b}y}\frac{v_\mathrm{a}}{v_{\mathrm{b}x}}\,t_\mathrm{ca}.$$

A 0 értékű megoldást, mint itt jelentőséggel nem bírót kizárjuk, a másik megoldás:

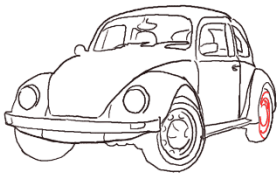
$$t_\mathrm{ca} = \frac{v_{\mathrm{b}y}\frac{v_\mathrm{a}}{v_{\mathrm{b}x}}}{\frac{g}{2}\left(\left(\frac{v_\mathrm{a}}{v_{\mathrm{b}x}}\right)^2 - 1\right)} = \frac{3{,}73\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\frac{4{,}56\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3{,}73\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}{\frac{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}\left(\left(\frac{4{,}56\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3{,}73\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\right)^2 - 1\right)} = 1{,}83\ \mathrm{s}\ \textit{(1 pont)}.$$

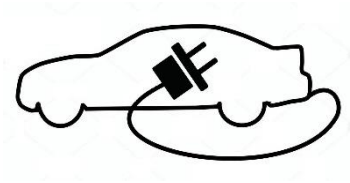
Visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$$h_\mathrm{c} = \frac{g}{2}t_\mathrm{ca}^2 = \frac{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}(1{,}83\ \mathrm{s})^2 = \underline{\underline{16{,}8\ \mathrm{m}}} \qquad \textit{(1 pont)}.$$

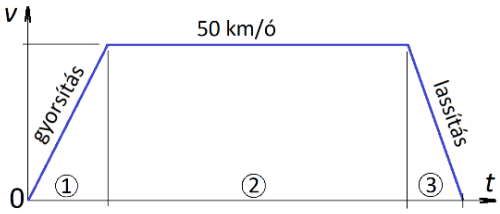
❄❄❄

3. Egy útkereszteződésben egyszerre indul egy benzinmotor, illetve egy villanymotor meghajtású (akkumulátoros) gépkocsi. A gépkocsik tömege m = 1600 kg, gördülési ellenállási ereje F_g = 200 N, légellenállásukat hanyagoljuk el.





A benzinmotoros jármű gyorsulása 2 m/s^2, a villanymotorosé 4 m/s^2, lassulásuk fékezéskor 3 m/s^2, legnagyobb megengedett sebességük 50 km/óra (lásd a mellékelt ábrát).



A két gépkocsi 500 m-es egyenes útszakasz megtétele után megáll.

(a) Legalább mennyi idő kell a két gépkocsinak az útszakasz megtételéhez? (**10 pont)**
(b) A benzinmotoros gépkocsi súrlódó fékkel fékez, így a jármű mozgási energiája hővé alakul, elvész. A villanymotoros gépkocsi villanymotorját fékezéskor generátor üzemmódba kapcsolják, így a mozgási energia 80%-át visszatáplálja az akkumulátorba. Mennyi energia szükséges a járművek mozgatásához a kiszemelt teljes útszakaszon? (**5 pont)**

<u>Megoldás:</u>
(a) A legrövidebb menetidőt a legnagyobb gyorsulással érik el a járművek.
Az 1. szakaszon (gyorsítás) megtett út és a menetidő (b: benzines, e: villanymotoros) *(3 pont)*:

$$s_{b1} = \frac{v^2}{2a_{b1}} = \frac{(13{,}9\,\text{m/s})^2}{2\times 2\,\text{m/s}^2} \approx 48{,}2\,\text{m}, \qquad t_{b1} = \frac{v}{a_{b1}} = \frac{13{,}9\,\text{m/s}}{2\,\text{m/s}^2} \approx 6{,}94\,\text{s},$$

$$s_{e1} = \frac{v^2}{2a_{e1}} = \frac{(13{,}9\,\text{m/s})^2}{2\times 4\,\text{m/s}^2} \approx 24{,}1\,\text{m}, \qquad t_{e1} = \frac{v}{a_{e1}} = \frac{13{,}9\,\text{m/s}}{4\,\text{m/s}^2} \approx 3{,}47\,\text{s}.$$

A 3. szakaszon (lassítás) megtett út és a menetidő megegyezik *(3 pont)*:

$$s_{b3} = \frac{v^2}{2a_{b3}} = \frac{(13{,}9\,\text{m/s})^2}{2\times 3\,\text{m/s}^2} \approx 32{,}2\,\text{m}, \qquad t_{b3} = \frac{v}{a_{b3}} = \frac{13{,}9\,\text{m/s}}{3\,\text{m/s}^2} \approx 4{,}63\,\text{s},$$

$$s_{e3} = \frac{v^2}{2a_{e3}} = \frac{(13{,}9\,\text{m/s})^2}{2\times 3\,\text{m/s}^2} \approx 32{,}2\,\text{m}, \qquad t_{e3} = \frac{v}{a_{e3}} = \frac{13{,}9\,\text{m/s}}{3\,\text{m/s}^2} \approx 4{,}63\,\text{s}.$$

Az állandó sebességű 2. szakaszon megtett út és a menetidő *(2 pont)*:

$$s_{b2} = s - s_{b1} - s_{b3} = 500\,\text{m} - 48{,}2\,\text{m} - 32{,}2\,\text{m} \approx 419{,}6\,\text{m}, \qquad t_{b2} = \frac{s_{b2}}{v} = \frac{419{,}6\,\text{m}}{13{,}9\,\text{m/s}} \approx 30{,}2\,\text{s},$$

$$s_{e2} = s - s_{e1} - s_{e3} = 500\,\text{m} - 24{,}1\,\text{m} - 32{,}2\,\text{m} \approx 443{,}7\,\text{m}, \qquad t_{e2} = \frac{s_{e2}}{v} = \frac{443{,}7\,\text{m}}{13{,}9\,\text{m/s}} \approx 31{,}9\,\text{s}.$$

A teljes menetidő *(2 pont)*:

$$t_b = t_{b1} + t_{b2} + t_{b3} \approx 41{,}8\,\text{s}, \qquad t_e = t_{e1} + t_{e2} + t_{e3} \approx 40{,}1\,\text{s}.$$

(b) A járművek mozgatásához szükséges munka a gyorsítási munka és a gördülési ellenállás ellenében végzett munka, mínusz a visszatermelt energia (a villanyautó esetén).
A gyorsítási munka és a gördülési ellenállás ellenében végzett munka a két jármű esetén megegyezik *(2 pont)*:

$$W_{\text{gy}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{1600\,\text{kg}\times(13{,}9\,\text{m/s})^2}{2} \approx 154{,}3\,\text{kJ}\,,$$

$s_1 + s_2 = s - s_3 = 500\,\text{m} - 32{,}2\,\text{m} = 467{,}8\,\text{m}$, $\quad W_{\text{g}} = F_g\,(s_1 + s_2) = 200\,\text{N}\times 467{,}8\,\text{m} \approx 93{,}57\,\text{kJ}$.

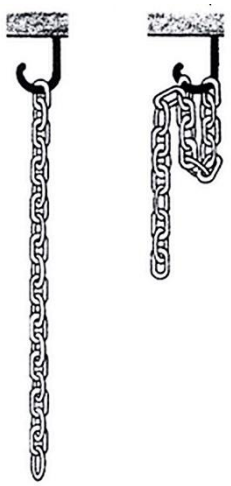
Fékezéskor a villanyautó által visszatermelt energia *(2 pont)*:

$$W_{\text{vissza}} = \eta\frac{mv^2}{2} = 0{,}8\times 154{,}3\,\text{kJ} \approx 123{,}46\,\text{kJ}\,.$$

A benzines és a villanymotoros jármű mozgatásához szüksége összes energia *(1 pont)*:

$W_{\text{b}} = W_{\text{gy}} + W_g \approx 247{,}9\,\text{kJ}$, $\quad W_{\text{e}} = W_{\text{b}} - W_{\text{vissza}} \approx 124{,}4\,\text{kJ}$.

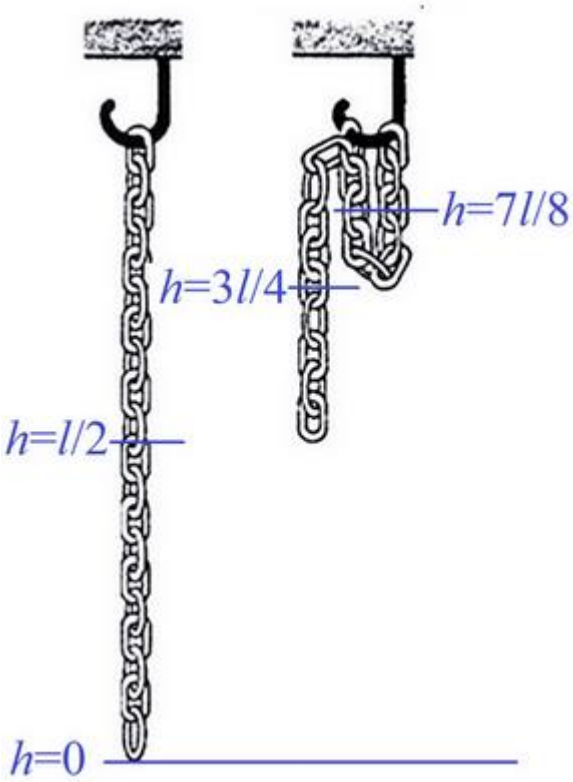
❄❄❄



4. Az m = 4 kg tömegű, l = 2 m hosszúságú lánc kampón lóg az ábra szerint. Számítsuk ki azt a munkát, amely a lánc középső láncszemének a kampóra történő felakasztáshoz szükséges! (g = 10 m/s^2) **(10 pont)**

Megoldás:

Legyen a (gravitációs) helyzeti energia h = 0 zérus pontja a teljesen leengedett lánc legalsó pontja. Jelölje *1*-es index a kezdeti állapotot (teljes hosszában lógó lánc), *2*-es index a végállapotot (a középső láncszem felakasztása után). (*2 pont*, természetesen más alapmagasság választás is elfogadható, ha azután helyesen és következetesen használja)



Az *1*-es állapotban az m tömegű lánc tömegközéppontja $h = l/2$ magasságban van, így a helyzeti energiája:

$$E_1 = m\cdot g\cdot\frac{1}{2}l \qquad \textit{(2 pont)}$$

A *2*-es állapotban a három láncdarab tömege (balról jobbra haladva) rendre $m/2$, $m/4$ és $m/4$, míg a (középpontjuk) magassága rendre $h = 3l/4$, $h = 7l/8$, $h = 7l/8$, így a teljes helyzeti energia:

$$E_2 = \frac{1}{2}m\cdot g\cdot\frac{3}{4}l + \frac{1}{4}m\cdot g\cdot\frac{7}{8}l + \frac{1}{4}m\cdot g\cdot\frac{7}{8}l = \frac{13}{16}mgl \qquad \textit{(2 pont)}$$

A szükséges munkavégzés a két helyzeti energia különbsége:

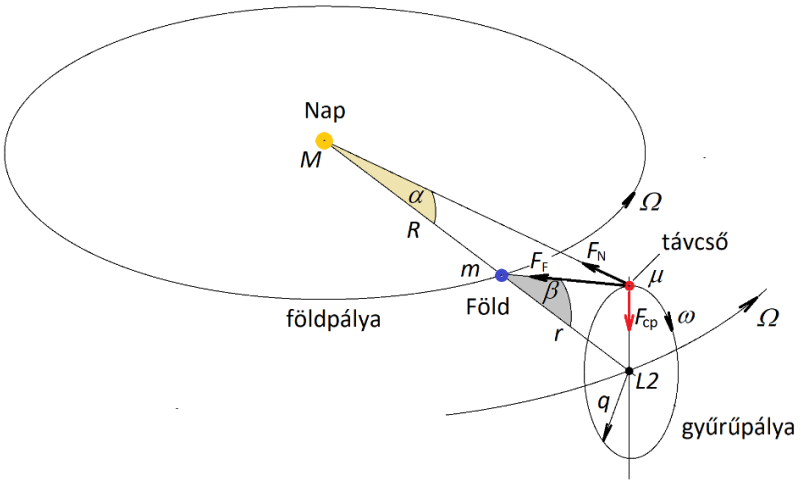
$$W = E_2 - E_1 = \frac{13}{16}mgl - \frac{1}{2}mgl = \frac{5}{16}mgl = \frac{5}{16}4\cdot 10\cdot 2 = 25\,\text{J} \qquad \textit{(4 pont)}$$

Tehát 25 J munkavégzés szükséges a középső láncszem kampóra akasztásához.

❄❄❄

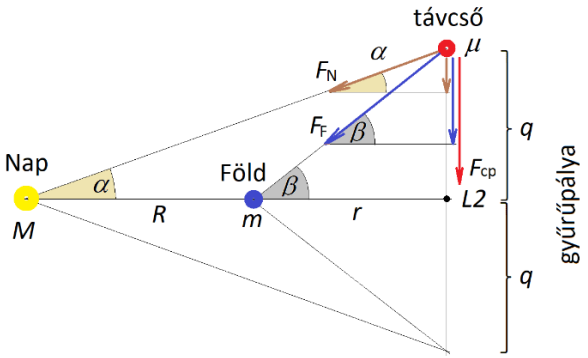
5. Két, nagytömegű égitest librációs pontjai azok a pontok a világűrben, ahol egy kis tömegű harmadik test (pl. űrszonda, űrtávcső) nyugalomban van a két nagytömegű égitesthez viszonyítva. (Lagrange 1772-ben kimutatta, hogy minden égitest-párnak 5 librációs pontja van.)

A 2021. dec. 25-én útjára bocsátott Webb űrtávcső a Nap-Föld rendszer L2 librációs pontja körül kering a Napot a Földdel összekötő egyenesre jó közelítéssel merőleges síkban. Ezt a pályát nevezzük gyűrűpályának. Az űrtávcső áramellátását egy nagyméretű napelemtábla adja.



A feladat megoldásakor alkalmazzuk a következő egyszerűsítő feltételeket.

- A Napot és a Földet tekintsük pontszerűnek. Az űrtávcsőre ható Coriolis-erőt hanyagoljuk el.
- Csak a Nap és a Föld gravitációs vonzóerejét vegyük figyelembe (a többi égitest hatását hanyagoljuk el).
- A Naphoz rögzített vonatkoztatási rendszert tekintsük inerciarendszernek.
- A Nap, a Föld és az L2 pont egy olyan egyenesen fekszik, amely Ω szögsebességgel forog a Nap körül.
- A Föld $R = 149\times10^6$ km sugarú körpályán kering a Nap körül.
- Az L2 pont $r = 1{,}49\times10^6$ km távolságra van a Földtől a Nappal átellenes oldalon.
- Tömegek:
  Nap: $M = 1{,}983\times10^{30}$ kg,
  Föld: $m = 5{,}974\times10^{24}$ kg,
  űrtávcső: $\mu = 6000$ kg.
- A gravitációs állandó:
  $\gamma = 6{,}672\times10^{-11}$ Nm²/kg².



A feladat megoldásakor használjuk ki, hogy az ábrán bejelölt α és β szög kicsi, és így ezekre igaz a következő közelítés:

$\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\,\alpha$, $\cos\alpha \approx 1$; $\sin\beta \approx \mathrm{tg}\,\beta$, $\cos\beta \approx 1$.

(a) Hány nap az űrtávcső keringési ideje az L2 pont körüli gyűrűpályán? (**15 pont)**
(b) Az L2 librációs pont úgy viselkedik, mintha az űrtávcső egy D direkciós állandójú (rugómerevségű) rugóval lenne ehhez a ponthoz rögzítve. Mekkora ez a direkciós állandó? (**5 pont)**
(c) Mekkora L2 irányú centripetális erő hat az űrtávcsőre, ha a gyűrűpálya sugara: q = 500 000 km? (**2 pont)**
(d) Mekkora a gyűrűpályán keringő űrtávcső kerületi sebessége? (**1 pont)**
(e) Miért keringtetik az űrtávcsövet az L2 pont körül a több százezer kilométer sugarú gyűrűpályán, miért nem az L2 pontban van az űrtávcső? (**2 pont)**

Megoldás:

(a) A Nap és a Föld gravitációs vonzóerejének a gyűrűpálya q sugarának irányába ható összetevői biztosítják a távcső gyűrűpályán maradását adó centripetális erőt *(5 pont)*:

$$F_N \sin\alpha + F_F \sin\beta = F_{cp}.$$

Az ábra jelöléseivel (itt ω az L2 pont körüli keringés szögsebessége):

$$\gamma \frac{M\mu}{\left(\frac{R+r}{\cos\alpha}\right)^2}\sin\alpha + \gamma \frac{m\mu}{\left(\frac{r}{\cos\beta}\right)^2}\sin\beta = q\mu\omega^2.$$

Használjuk ki, hogy a megadott szögek kicsik *(5 pont)*: $\gamma \frac{M}{(R+r)^2}\operatorname{tg}\alpha + \gamma \frac{m}{r^2}\operatorname{tg}\beta \approx q\omega^2$.

Írjuk be a szögek tangensét a geometriai háromszögekből:

$$\boxed{\gamma \frac{M}{(R+r)^2}\frac{q}{R+r} + \gamma \frac{m}{r^2}\frac{q}{r} \approx q\omega^2}. \qquad (*)$$

Fejezzük ki az L2 pont körüli keringés szögsebességét *(2 pont)*: $\omega \approx \sqrt{\gamma\left[\frac{M}{(R+r)^3} + \frac{m}{r^3}\right]}$.

A szögsebesség (és a keringési idő) ebben a közelítésben független a gyűrűpálya sugarától. Behelyettesítve:

$$\omega \approx \sqrt{6{,}672\times10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\left\{\frac{1{,}983\times10^{30}\,\mathrm{kg}}{\left[(149+1{,}49)\times10^9\,\mathrm{m}\right]^3} + \frac{5{,}974\times10^{24}\,\mathrm{kg}}{\left[1{,}49\times10^9\,\mathrm{m}\right]^3}\right\}} \approx 3{,}99\times10^{-7}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}.$$

A keringési idő a szögsebességből *(3 pont)*:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3{,}99\times10^{-7}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}} \approx 1{,}57\times10^7\,\mathrm{s} \approx 182{,}2\,\mathrm{nap} \approx 0{,}5\,\mathrm{év}.$$

(b) Az előző pontban (* egyenlet bal oldala) megkaptuk az űrtávcsőre ható, L2 irányába mutató centripetális erőt. Alakítsuk át az egyenletet *(3 pont)*:

$$F_{cp} = \gamma \frac{M}{(R+r)^2}\frac{q}{R+r} + \gamma \frac{m}{r^2}\frac{q}{r} = \gamma\left[\frac{M}{(R+r)^2}\frac{1}{R+r} + \frac{m}{r^2}\frac{1}{r}\right]q.$$

Látható, hogy a vonzóerő arányos az L2 ponttól mért q távolsággal (a gyűrűpálya sugarával). Az arányossági tényező egy képzeletbeli rugó direkciós állandója: $F_{cp} = Dq$, $\quad \mu q\omega^2 = Dq$.

Innen a direkciós állandó *(2 pont)*:

$$D \approx \mu\omega^2 = 6000\,\mathrm{kg}\times\left(3{,}99\times10^{-7}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)^2 \approx 9{,}56\times10^{-10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

(c) A centripetális erő, ha a pályasugár 500 000 km *(2 pont)*:

$$F_{cp} = Dq = 9{,}56\times10^{-10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\times5\times10^8\,\mathrm{m} \approx 0{,}478\,\mathrm{N}.$$

(d) A gyűrűpályán a kerületi sebesség *(1 pont)*:

$$v = q\omega = 5\times10^8\,\mathrm{m}\times3{,}99\times10^{-7}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \approx 200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}2\,\mathrm{km/s}.$$

(e) Az L2 pont állandóan a Föld árnyékában van, az űrtávcső napelemei az L2 pontban nem termelnének áramot, ezért kering az űrtávcső az L2 pont körül a földárnyékon kívül eső pályán. *(2 pont)*

(A valóságban az űrtávcső nem zárt görbén mozog az L2 pont körül, hanem ellipszishez hasonló Lissajous-görbén. A 750 000 km-es nagytengely párhuzamos az ekliptika síkjával, a kistengely hossza 350 000 km, a keringési idő fél év.)

❄❄❄

6. Neumann János 1944-ben találkozott egy vasútállomáson Herman Goldstine matematikussal, aki elmondta neki, hogy dolgoznak egy olyan számítógépen, amely másodpercenként több mint 300 művelet elvégzésére lesz képes. A gép felkeltette Neumann érdeklődését és bekapcsolódott a munkába, amelynek az eredménye az EDVAC terveinek elkészítése lett. Neumann János az 1945-ben publikált "First Draft of a Report on the Edvac" című művében fektette le a számítógépek működési elveit, ezeket az elveket ma Neumann-elvekként ismerjük. A mindennapjainkban használt számítógépek ezen elvek alapján működnek, például az alábbi feladatban szereplő (másodpercenként mintegy 25 milliárd művelet elvégzésére képes!) laptop is.

Dani vasárnap délután busszal utazik otthonról a kollégiumba. Előző héten kimaradt az egyik előadásról, és hogy ezt bepótolja, az utat arra akarja használni, hogy az előadás felvételét laptopján végignézze. Lehajtja az előtte levő ülés hátulján található asztalkát, hogy erre helyezze a laptopot. Az ülés támlája függőleges, az asztalka lapja vízszintes, mélysége 17 cm. A laptop mélysége 23 cm, és két fő része van, egy egyenletes tömegeloszlással közelíthető 1125 g tömegű (a billentyűzetet is tartalmazó) alsó részből, és egy ugyancsak egyenletes tömegeloszlással közelíthető 600 g tömegű kijelzőből. A laptop kinyitottságának mértéke legyen az, hogy mennyivel van a kijelző teteje hátrébb az aljánál. Mennyivel lehet a kijelző teteje hátrébb az aljánál anélkül, hogy leessen az asztalkáról? A laptop csuklópántja önmagától nem nyílik vagy záródik, jól tartja a beállított szöget. **(10 pont)**

<u>Megoldás:</u>

Jelölések: a = 17 cm, $\ell_a = \ell_k$ = 23 cm, m_a = 1125 g, m_k = 600 g, α = ?

A test nem esik le addig, amíg tömegközéppontja még az asztalka fölött helyezkedik el, azaz $x_{TKP} \leq a$, ahol x_{TKP} a tömegközéppontnak az ábrán látható koordinátatengelyen értelmezett koordinátája. Amíg a laptop nyitottsága meg nem haladja a derékszöget, biztosan nem áll fönn a leesés veszélye (kis kinyitottságnál ehhez persze az is kell, hogy az asztalka a mélysége nagyobb, mint a laptop $\ell_a = \ell_k$ mélységének fele). A legfeljebb derékszögig való kinyitás azonban nem biztos, hogy kényelmes, merőleges rálátást tesz lehetővé a képernyőre, ezért jó eséllyel egy, az ábra jelölései szerint $\alpha \leq 90°$-os nyitottság fog megvalósulni. Szögfüggvényes ismeretek birtokában a minimális szög is gyorsan meghatározható, a példa azonban a 9. osztályos tanulóktól csak az x_k-t kérdezi.

(2 pont)

Használjuk ki, hogy a két részből álló test (laptop) részeinek tömegközéppontjait föl tudjuk írni x_k függvényében:

$$x_{TKP} \leq a,$$

$$\frac{m_k x_k + m_a x_a}{m_k + m_a} \leq a \qquad \textit{(1 pont)},$$

$$\frac{m_\mathrm{k}\frac{x_\mathrm{k}}{2}+m_\mathrm{a}\left(x_\mathrm{k}+\frac{\ell_\mathrm{a}}{2}\right)}{m_\mathrm{k}+m_\mathrm{a}}\le a \qquad \textit{(3 pont)},$$

Ebben az egyenlőtlenségben x_k-n kívül nincs ismeretlen, x_k-ra rendezve megkapjuk a lehető legnagyobb kinyitottság mértékét:

$$m_\mathrm{k}\frac{x_\mathrm{k}}{2}+m_\mathrm{a}x_\mathrm{k}+m_\mathrm{a}\frac{\ell_\mathrm{a}}{2}\le(m_\mathrm{k}+m_\mathrm{a})a\,,$$

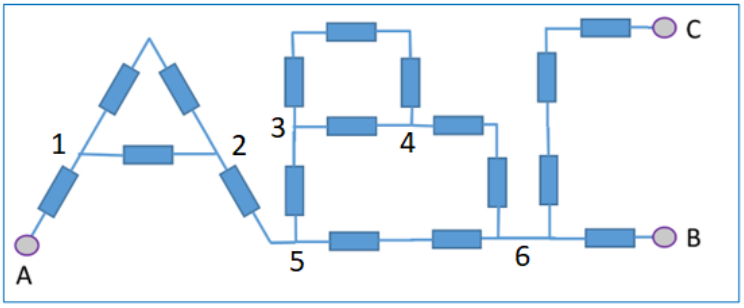
$$m_\mathrm{k}\frac{x_\mathrm{k}}{2}+m_\mathrm{a}x_\mathrm{k}=\left(m_\mathrm{k}\frac{1}{2}+m_\mathrm{a}\right)x_\mathrm{k}\le(m_\mathrm{k}+m_\mathrm{a})a-m_\mathrm{a}\frac{\ell_\mathrm{a}}{2} \quad \textit{(2 pont)},$$

$$x_\mathrm{k}\le\frac{(m_\mathrm{k}+m_\mathrm{a})a-m_\mathrm{a}\frac{\ell_\mathrm{a}}{2}}{m_\mathrm{k}\frac{1}{2}+m_\mathrm{a}}=\frac{(600\ \mathrm{g}+1125\ \mathrm{g})17\ \mathrm{cm}-1125\ \mathrm{g}\frac{23\ \mathrm{cm}}{2}}{600\ \mathrm{g}\frac{1}{2}+1125\ \mathrm{g}}=\underline{\underline{11{,}5\ \mathrm{cm}}} \quad \textit{(2 pont)}.$$

Feltűnhet a versenyzőnek, hogy ez éppen a kijelző magasságának fele, így helyesen kikövetkeztetheti azt is, hogy a kinyitottság minimális szöge 60°.

❄❄❄

7. 18 darab, azonos nagyságú R ellenállásból elkészítettük az **ABC** betűket, és az ábra szerint összekapcsoltuk azokat. Mennyi az eredő ellenállás az ábrán bejelölt **A-B**, **A-C**, illetve **B-C** pontok között? (**10 pont)**



Megoldás:

Az **1-2** csomópont közti ellenállás *(1 pont)*:

$$\frac{1}{R_{1-2}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{2R}=\frac{2+1}{2R}=\frac{3}{2R}, \qquad R_{1-2}=\frac{2}{3}R\,.$$

Az **A** betű alakú elrendezés eredő ellenállása (**A-5 pont)** *(1 pont)*:

$$R_{A-5}=R+R_{1-2}+R=2R+\frac{2}{3}R=\frac{8}{3}R\,.$$

A **3-4** csomópont fölötti három, sorba kapcsolt ($3R$) ellenállásnak és az ezzel párhuzamosan kapcsolt negyedik ellenállásnak az eredője *(2 pont)*:

$$\frac{1}{R_{3-4}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{3R}=\frac{3+1}{3R}=\frac{4}{3R}, \qquad R_{3-4}=\frac{3}{4}R\,.$$

A **B** betű alakú elrendezés eredő ellenállása (**5-6** csomópont) *(2 pont)*:

$$\frac{1}{R_{5-6}}=\frac{1}{2R}+\frac{1}{3R+R_{3-4}}=\frac{1}{2R}+\frac{1}{3R+3/4R}=\frac{1}{2R}+\frac{4}{15R}=\frac{15+8}{30R}=\frac{23}{30R}, \qquad R_{5-6}=\frac{30}{23}R\,.$$

Az **A-B** pontok közötti eredő ellenállás *(1 pont)*:

$$R_{A-B}=R_{A-5}+R_{5-6}+R=\left(\frac{8}{3}+\frac{30}{23}+1\right)R=\frac{343}{69}R\approx 4{,}971R\,.$$

Az **A-C** pontok közötti eredő ellenállás *(2 pont)*:

$$R_{A-C}=R_{A-5}+R_{5-6}+3R=\left(\frac{8}{3}+\frac{30}{23}+3\right)R=\frac{184+90+207}{69}R=\frac{481}{69}R\approx 6{,}971R\,.$$

Az **B-C** pontok közötti eredő ellenállás *(1 pont)*:

$$R_{B-C}=4R\,.$$

❄❄❄

8. „– A zongorát csak bérlem, papa! Van egy barátom, aki egészen jól játszik. Ő szokott nekünk hangversenyeket adni. Tegnap is itt volt. Mindenféle műfajt képes játszani. – Hirtelen az apja szemébe nézett. – Egy nagyon rendes fiúról van szó! Magyar, ő is a vegyészkarra jár velem együtt. Nagyon okos! Amíg ezt elvégzi itt, otthon matematikából doktorál!
Gedeon morogva reagált.
– Hogy hívják a barátodat?
Laci nagyon remélte, hogy ismerős lesz a kimondott név.
– Neumann. Neumann Jancsi. És tényleg nagyon okos!”
(Részlet Berényi Anna: Richter - Richter Gedeon regényes életrajza című könyvéből.)

Neumann János kiválóan zongorázott és szívesen hallgatott zenét, de meglehetősen szórakozott egyéniség volt. A Neumann család szalonjában zongorán kívül hanglemez lejátszó is volt.

Egy éppen hallgatott hanglemezkorong $f_0 = 78\dfrac{1}{\text{perc}}$ fordulatszámmal forog (függőleges tengely körül). A korong középétől R = 10 cm távolságban ott felejtett pénzérme fekszik. A korong és az érme közötti tapadási súrlódási tényező μ_0. A lejátszás végén a lejátszó megáll: a korong egyenletes lassulásba kezd $\beta = 13\dfrac{1}{\text{s}^2}$ szöggyorsulással. Legalább mekkora legyen a tapadási súrlódási tényező, hogy a pénzérme ne repüljön le (ne csússzon meg)? (g = 10 m/s^2) **(15 pont)**

Megoldás:

A korong szögsebessége az

$\omega(t) = \omega_0 - \beta \cdot t$ *(1 pont)*

függvény szerint változik, ahol a kezdeti szögsebesség:

$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \dfrac{78}{60}\dfrac{1}{\text{s}} = 8{,}17\dfrac{1}{\text{s}}.$ *(1 pont)*

A korongon lévő test centripetális gyorsulása:

$a_{cp} = R \cdot \omega^2(t) = R \cdot (\omega_0 - \beta \cdot t)^2$ *(1 pont)*

A test tangenciális gyorsulása pedig:

$a_t = R \cdot \beta$ *(1 pont)*

A test eredő gyorsulása:

$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = \sqrt{R^2 \cdot (\omega_0 - \beta \cdot t)^4 + R^2 \cdot \beta^2}$ *(1 pont)*

amelyet a tapadási súrlódási erő biztosít a test számára.
A testre három erő hat: a $G = mg$ súlyerő, az N felületi tartóerő és az F_t tapadási súrlódási erő. Az első kettő kiejti egymást (nincs függőleges gyorsulás), tehát a testre ható eredő erő azonos tapadási súrlódási erővel, így a test mozgásegyenlete:

$\sum F = F_t = m \cdot a$ *(2 pont)*

A tapadási súrlódási erő felülről korlátos:

$F_t \le \mu_0 \cdot N = \mu_0 \cdot mg$ *(2 pont)*

A fenti két összefüggésből kapjuk a tapadás feltételét:

$ma \le \mu_0 \cdot mg$,

azaz:

$$\sqrt{R^2 \cdot (\omega_0 - \beta \cdot t)^4 + R^2 \cdot \beta^2} \le \mu_0 g \,,$$ *(2 pont)*

amiből:

$$\frac{R}{g}\sqrt{(\omega_0 - \beta \cdot t)^4 + \beta^2} \le \mu_0$$ *(1 pont)*

Jól látható, hogy a legnagyobb tapadás a lassulás kezdeti pillanatában szükséges, ezért a minimális tapadási együttható:

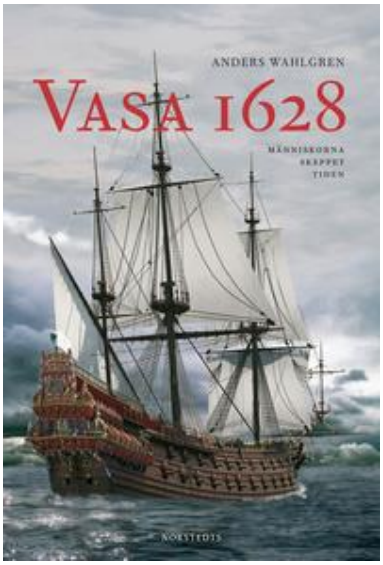
$$\frac{R}{g}\sqrt{\omega_0^4 + \beta^2} \le \mu_0 \,.$$ *(2 pont)*

A feladat adataival:

$$\frac{0{,}1}{10}\sqrt{8{,}17^4 + 13^2} = 0{,}68 \le \mu_0$$ *(1 pont)*

❄❄❄

9. 1628 nyarán a svéd haditengerészet vízre bocsátotta az akkori uralkodócsalád nevét viselő Vasa csatahajót. A hajó korábban nem látott mennyiségű, összesen 64 nehéz ágyút hordozott. A svéd flottában és más országokéiban is léteztek a Vasánál nagyobb hajók, egyik sem volt képes ilyen mennyiségű fegyverzet elhelyezésére. Habár külseje a végletekig díszes volt, a Vasa valósággal hemzsegett a tervezési hibáktól. A király parancsa előtt eredetileg mindössze 36 darab, 24 fontnyi (10,9 kilogrammnyi) lövedék kilövésére képes ágyú hordozására tervezték, így méretei erre voltak szabva. Ezt követően azonban áttervezték a hajót – a már meglévő hosszúság mellett –, és az eredetileg is tervezett fölé egy további ágyúhordó fedélzetet helyeztek. A hajó súlypontja veszélyesen magasra került.



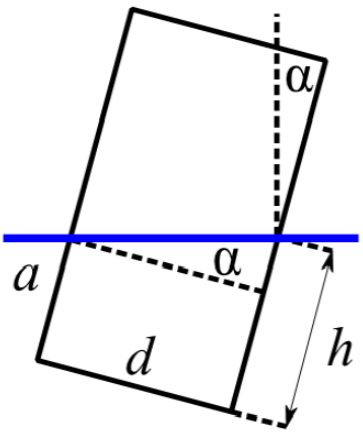
A hibák ellenére 1628. augusztus 10-én a hatalmas hadihajót bemutatták Stockholmban a közönségnek, hogy megtekinthessék első útját. Mindössze húsz perccel indulása után azonban a Vasát erős széllökés érte, amitől nagymértékben megdőlt balra. Ezt követően még egyenesbe jött, azonban a következő széllökés után még jobban eldőlt, és lassan, de messziről is láthatóan süllyedni kezdett. A hajó ekkor már eléggé megdőlt ahhoz, hogy a zárható, ám az útra nyitva hagyott alsó lőréseken keresztül elkezdjen beömleni a víz, amitől már semmiféle esély sem volt visszahozni egyenesbe, a hajó felfordult és elsüllyedt.

Modellezzük a Vasa-t egy téglatestként, amelynek alapja l = 47,6 m hosszú és d = 11,3 m széles, saját (rakomány nélküli) tömege $m_{hajó}$ = 1230 t. A legalsó lőrések a hajó aljától számítva h = 6,2 m magasan vannak. Maximum mekkora terhet szállíthat a hajó, ha azt szeretnénk, hogy még a függőlegeshez viszonyítva 12°-ot oldalra dőlve se folyjon be a víz? (A víz sűrűségét vegyük 1000 kg/m^3 értékűnek.) **(10 pont)**

<u>Megoldás:</u>

Először a maximálisan kiszorított víztérfogatot határozzuk meg.

Az ábra szerint a bemerülő hajótestrész hosszanti keresztmetszete trapéz alakú, amelynek a hosszabbik alapja h, a rövidebb pedig:



$$a = h - d \cdot tg\alpha = 6,2 - 11,3 \cdot tg12° = 3,8\ \text{m},$$

a magassága pedig d, így a trapéz területe:

$$A = \frac{h+a}{2} \cdot d = \frac{6,2+3,8}{2} \cdot 11,3 = 56,5\ \text{m}^2.$$

A bemerülő hajótestrész (maximális) térfogata:

$$V_{\max} = A \cdot l = 56,5\ \text{m}^2 \cdot 47,6\ \text{m} = 2689,4\ \text{m}^3$$ *(4 pont)*

Határhelyzetben a hajó teljes súlya megegyezik a felhajtóerővel:

$$m_{teljes} \cdot g = \rho_{víz} \cdot g \cdot V_{\max},$$ *(4 pont)*

amiből a hajó maximális teljes tömege:

$$m_{teljes} = \rho_{víz} \cdot V_{\max} = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 2689,4\ \text{m}^3 = 2689,4\ \text{t}$$ *(1 pont)*

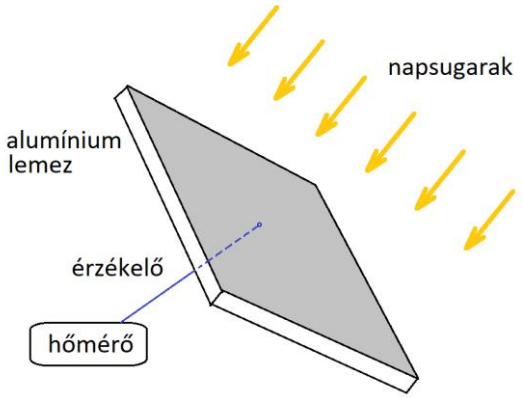
A teljes tömeg az üres hajó tömegének és a rakomány tömegének összege, így:

$$m_{rakomány} = m_{teljes} - m_{hajó} = 2689,4\ \text{t} - 1230\ \text{t} = 1459,4\ \text{t}$$ *(1 pont)*

Tehát maximálisan mintegy 1460 tonna rakomány lehetett volna rajta (ám a valóságban a rakomány tömege több mint 1600 tonna volt).

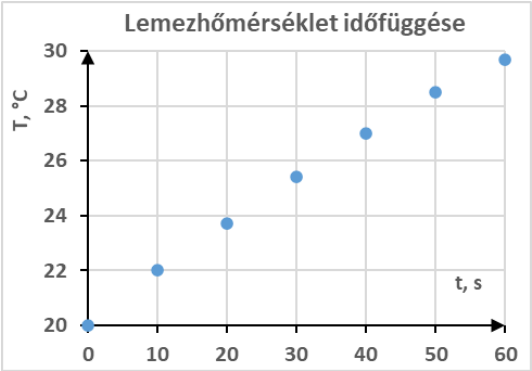
❄❄❄

10. A Napból a Földre eső besugárzott teljesítmény a Föld felszínén levő, a napsugarakra merőleges 1 m^2 felületre időegység alatt beeső sugárzási energia (hő). Egysége $J/(s\ m^2) = W/m^2$.
A besugárzott teljesítményt a következő mérési összeállítással határoztuk meg. Készítettünk egy 10 cm x 10 cm x 0,2 cm méretű, egyik oldalán mattfeketére festett alumíniumlemezt. Az alumínium sűrűsége 2,7 g/cm^3, fajhője 0,9 J/g/K.
Egy termoelemet (elektromos hőmérséklet-érzékelőt) erősítettünk a lemez fényes, hátsó oldalához. A lemezt egy jó hőszigetelő anyagból (pl. hungarocell) készült állványhoz rögzítettük, és a mattfekete oldalával a napsugarakra merőleges irányba állítottuk.



Egy árnyékoló lappal letakartuk a lemezt, és megvártuk, hogy hőmérséklete állandósuljon: a lemez fölvegye a levegő és a környező tárgyak hőmérsékletét (esetünkben ez 20°C). Ezután elvettük az árnyékoló lapot, elindítottunk egy stopperórát, és 10 s-onként följegyeztük a lap hőmérsékletét. A mérési eredményeket a mellékelt grafikonon mutatjuk be.

(a) Mekkora az alumíniumlemez hőkapacitása? (**5 pont**)
(b) Vonalzóval rajzolja meg a mérési pontokra szemre legjobban illeszkedő egyenest, és számítsa ki ennek meredekségét. Az eredményt °C/s egységben adja meg. (**5 pont**)
(c) Tételezzük föl, hogy a mattfekete lemez a reá eső összes sugárzási energiát elnyeli, és a mérési idő alatt a környezetének leadott energia elhanyagolható. Mekkora a besugárzott felületi teljesítmény? Az eredményt W/m^2 egységben adja meg. (**5 pont**)



Megoldás:
(a) A lemez tömege és hőkapacitása *(5 pont)*:

$$m = \rho V = 2{,}7\,\mathrm{g/cm^3} \times 20\,\mathrm{cm^3} = 54\,\mathrm{g}, \qquad C = mc = 54\,\mathrm{g} \times 0{,}9\,\mathrm{J/g/K} = 48{,}6\,\mathrm{J/K}.$$

(b) Az illesztett egyenes meredeksége *(5 pont)*:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \approx \frac{30\,°\mathrm{C} - 20\,°\mathrm{C}}{60\,\mathrm{s}} \approx 0{,}16\,°\mathrm{C/s}.$$

(c) Legyen a keresett beeső felületi teljesítmény E, a lemez alapterülete A. A lemezre beeső teljesítmény egyenlő a lemez belső energiájának időegységre eső változásával: $EA = C\dfrac{\Delta T}{\Delta t}$.

Innen a beeső felületi teljesítmény *(5 pont)*:

$$E = \frac{C}{A}\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{48{,}6\,\mathrm{J/K}}{0{,}01\,\mathrm{m^2}} \times 0{,}16\,°\mathrm{C/s} \approx 778\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}.$$

❄❄❄

11. A Koczka család házában a fűtést, a főzést és a melegvíz előállítását is gázzal oldják meg. A családi ház mérőórájáról leolvasott 2022. december havi gázfogyasztása 162 m^3 volt. Ebben az időszakban a légnyomás átlaga 98,4 kPa, a mérőórában a földgáz átlaghőmérséklete 2,2 ºC volt. (A mérőóra a rajta átáramló 2,50 kPa túlnyomású földgáz térfogatát méri.)
A fogyasztók a felhasznált gáz ún. *technikai normálállapot*ra vonatkoztatott térfogata alapján fizetik a gázszámlát. A technikai normálállapot hőmérséklete T_{tn} = 15 ºC, nyomása p_{tn} = 101,325 kPa.

(a) Hány köbméter a Koczka család technikai normálállapotra átszámított havi gázfogyasztása? **(5 pont)**

A jelenlegi árszabályozás szerint a gáz ára havi 144 m^3 fogyasztásig 102 Ft/m^3, e feletti fogyasztásé pedig 747 Ft/m^3.

(b) Hány Ft volt a Koczka család 2022. decemberi gázszámlája? **(2 pont)**

A jelenlegi árszabályozás szerint a villamos energia ára havi 210 kWh fogyasztásig 36 Ft/kWh, e feletti fogyasztásé pedig 70,1 Ft/kWh. (Megjegyzés: a feladatban leírt szabályrendszer a valóságos kormányrendelet némileg egyszerűsített változata.)

(c) Hány Ft lenne a Kocka család 2022. decemberi elektromosáram-számlája, ha a fenti gázból származó energiamennyiséget villamos energiával fedeznék? Technikai normálállapotban a fogyasztott földgáz szabványos fűtőértéke 34,5 MJ/m^3. **(3 pont)**

<u>Megoldás:</u>
(a) A mért fogyasztás V_m = 162 m^3 volt, méghozzá a feladat adatai szerint
$T_m = 2,2°C = 275,2K$ hőmérsékleten és
$p_m = 98,4\text{ kPa} + 2,5\text{ kPa} = 100,9\text{ kPa} = 1,009 \cdot 10^5\text{ Pa}$ nyomáson *(2 pont)*. Az egyesített gáztörvény szerint:

$$\frac{p_m \cdot V_m}{T_m} = \frac{p_{tn} \cdot V_{tn}}{T_{tn}},$$ *(2 pont)*

amiből:

$$V_{tn} = \frac{p_m \cdot T_{tn}}{p_{tn} \cdot T_m} V_m = \frac{1,009 \cdot 10^5 \cdot 288}{1,01325 \cdot 10^5 \cdot 275,2} \cdot 162 = 168,8\text{ m}^3$$ *(1 pont)*

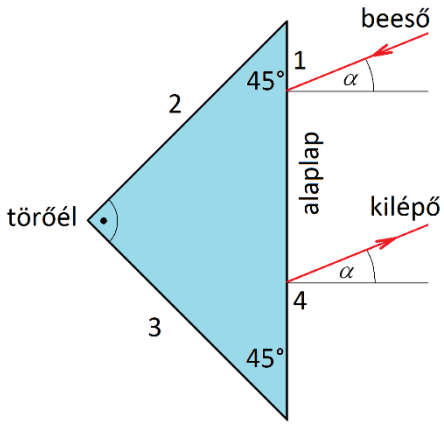
(b) A havi fogyasztásuk 144 m^3 felett van, így a fizetendő összeg két részből tevődik össze.
144 m^3 fogyasztásért $144\text{ m}^3 \cdot 102\ \text{Ft}/\text{m}^3 = 14688\text{ Ft}$, a felette levő 24,8 m^3 fogyasztásért pedig
$24,8\text{ m}^3 \cdot 747\ \text{Ft}/\text{m}^3 = 18526\text{ Ft}$ fizetendő, tehát a teljes számla 33214 Ft. *(2 pont)*

(c) Az elhasznált 168,8 m^3 technikai normálállapotú gáz energiamennyisége
$168,8\text{ m}^3 \cdot 34,5\ \text{MJ}/\text{m}^3 = 5824\text{ MJ} = 1618\text{ kWh}$ *(1 pont)*
Tehát a havi fogyasztásuk 210 kWh felett lenne, így a fizetendő összeg két részből tevődne össze.

210 kWh fogyasztásért $210\ \text{kWh} \cdot 36\ {}^{\text{Ft}}\!/_{\text{kWh}} = 7560\ \text{Ft}$, a felette levő 1408 kWh fogyasztásért pedig $1408\ \text{kWh} \cdot 70{,}1\ {}^{\text{Ft}}\!/_{\text{kWh}} = 98700\ \text{Ft}$ fizetendő, tehát a teljes számla 106260 Ft lenne, ami háromszorosa a gázért fizetett összegnek. *(2 pont)*

❄❄❄

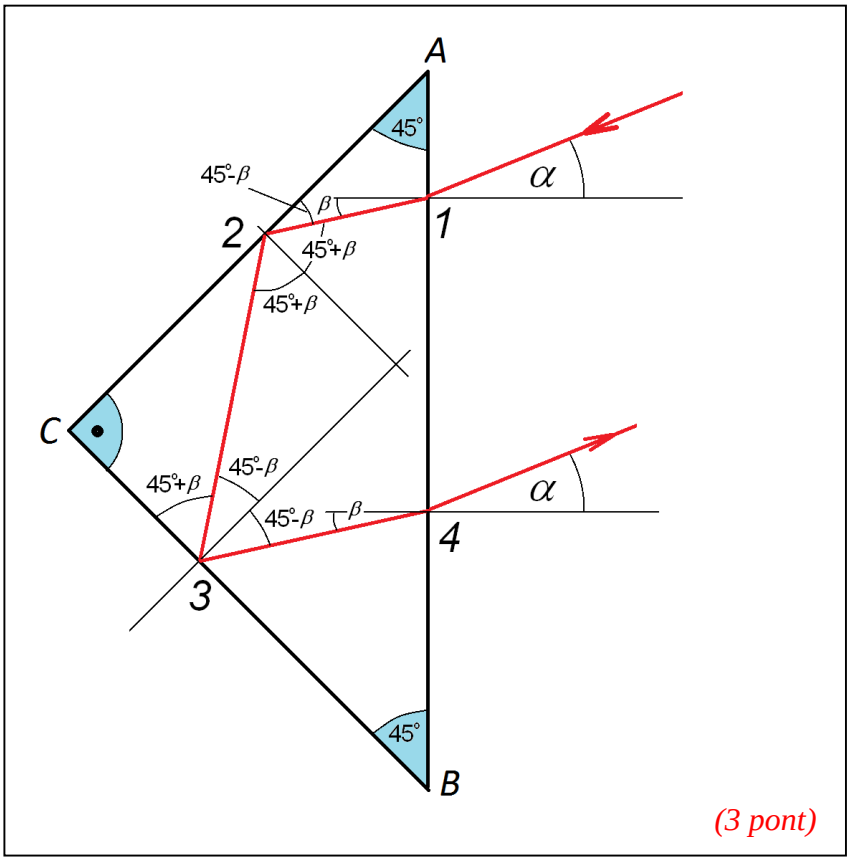
12. Az ábrán egy derékszögű, egyenlőszárú, háromszög alakú üvegprizmát látunk a törőélére merőleges irányból. A prizma alaplapjára merőlegesen nem túl nagy α beesési szöggel fénysugarat ejtünk. A fénysugár két törés és két teljes visszaverődés után kilép a prizmából. A prizma anyagának környezetre vonatkoztatott törésmutatója $n > 1$.



(a) A feladat megoldásához készítsen nagyméretű, arányos rajzot, amelyen jelölje be a sugármenetet, a beesési merőlegeseket, szögeket. **(3 pont)**
(b) Bizonyítsuk be, hogy a prizmára beeső és a prizmából kilépő fénysugár párhuzamos. **(7 pont)**

Megoldás:

(a)



(3 pont)

(b) Az ábrán bejelölt szögek alapján a megoldás *(7 pont)*
1: törési törvény.
12A háromszög belső szögeinek összege 180°.
2: teljes visszaverődés, a visszaverődési szög megegyezik beesési szöggel.
C32 háromszög belső szögeinek összege 180°.
3: teljes visszaverődés, a visszaverődési szög megegyezik beesési szöggel.
34B háromszög belső szögeinek összege 180°.
4: törési törvény.

❄❄❄

13. Egy festőművész csak a 40 cm és 2 m távolságtartományban lévő tárgyakat látja tisztán. Ahhoz, hogy jól lássa a messze lévő tárgyakat, valamint a szemétől 25 cm-re elhelyezett festőállványt, a szemorvos progresszív szemüveget javasol. A progresszív szemüvegben lényegében két lencse van összeillesztve: egy felső és egy alsó lencserészre tagolódik, melyek a távolra, illetve a közelre látást teszik lehetővé. (A felső és alsó részt pedig egy köztes zóna köti össze, amely fokozatos átmenetet ad.) Tervezzük meg a festőművész szemüvegét, azaz hány dioptriás törőerejű lencse legyen a szemüveg (távoli látást segítő) felső, illetve (közeli látást segítő) alsó lencserésze? (A szemlencse és a szemüveglencse egymás mellé helyezett vékonylencsének tekinthető optikailag.) **(10 pont)**

Megoldás:

Vegyük észre, hogy jelen esetben két látási problémát kell orvosolnunk, tehát két lencsét tervezünk: a felső lencsére (távolpont) vonatkozó adatokat *1*-es, az alsó lencsére (közelpont) vonatkozókat pedig *2*-es indexszel fogjuk jelölni. A két szituációra külön-külön alkalmazzuk a

$$D = \frac{1m}{f} = \frac{1m}{t} + \frac{1m}{k}$$

leképezési törvényt, méghozzá mindkét esetben kétszer írjuk fel: egyszer szemüveg nélkül szabadszemmel (*sz* indexszel), illetve szemüveglencsével (*l* indexszel).

Ezen jelölésekkel a feladat adatai:

- szabad szemmel a távolponti tárgytávolság $t_{1,sz} = 2m$, szemüveggel pedig a végtelenbe akarjuk tenni, tehát $t_{1,l} = \infty$, a szem(lencse) törőereje ez esetben $D_{1,sz}$, a szemüveglencséé pedig $D_{1,l}$,
- szabad szemmel a közelponti tárgytávolság $t_{2,sz} = 0,4m$, szemüveggel pedig 25 cm távolságba akarjuk tenni, tehát $t_{2,l} = 0,25m$, a szem(lencse) törőereje ez esetben $D_{2,sz}$, a szemüveglencséé pedig $D_{2,l}$.
- a képtávolság minden esetben ugyanazon *k* érték lesz, hiszen a szemlencse és a retina távolsága mindenkinél anatómiailag rögzített.

A szemlencse és szemüveglencse eredő törőerejére használjuk a $D_{sz} + D_l$ összefüggést.

Ezen jelölésekkel már felírhatjuk a leképezési törvényeket:

A távolpontra szabad szemmel, illetve szemüveggel:

$$D_{1,sz} = \frac{1m}{t_{1,sz}} + \frac{1m}{k}, \quad \textit{(2 pont)}, \qquad \text{illetve } D_{1,sz} + D_{1,l} = \frac{1m}{t_{1,l}} + \frac{1m}{k} \quad \textit{(2 pont)}$$

A második egyenletből kivonva az elsőt:

$$D_{1,l} = \frac{1m}{t_{1,l}} - \frac{1m}{t_{1,sz}} = \frac{1m}{\infty} - \frac{1m}{2m} = -0,5dptr \quad \textit{(1 pont)}$$

A közelpontra szabad szemmel, illetve szemüveggel:

$$D_{2,sz} = \frac{1m}{t_{2,sz}} + \frac{1m}{k}, \quad \textit{(2 pont)}, \qquad \text{illetve } D_{2,sz} + D_{2,l} = \frac{1m}{t_{2,l}} + \frac{1m}{k} \quad \textit{(2 pont)}$$

A második egyenletből kivonva az elsőt:

$$D_{2,l} = \frac{1m}{t_{2,l}} - \frac{1m}{t_{2,sz}} = \frac{1m}{0,25m} - \frac{1m}{0,4m} = +1,5dptr \quad \textit{(1 pont)}$$

Tehát a progresszív szemüveg felső lencserésze -0,5 dioptriás, az alsó lencserésze pedig +1,5 dioptriás legyen.

❄❄❄