Szakács Jenő Megyei Fizikaverseny

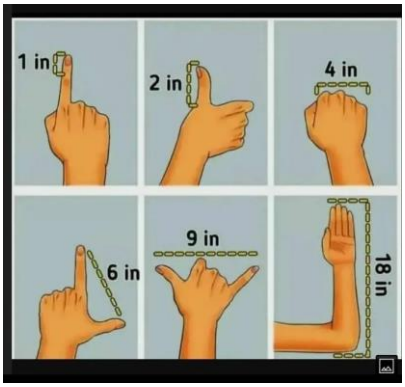
2021/2022. tanév

II. forduló

Megoldások

2022. február 14.

1. Amerikai tudósok ésszerűsíteni szeretnék fontot, lábat és más hasonló egységeket használó angolszász mértékrendszerüket olyan módon, hogy az időnek új egységet választanak, amit *tick*-nek akarnak elnevezni. A cél az, hogy 1 N erő, ami tudvalevőleg éppen 1 kg·m/s^2, pontosan 1 font·láb/tick^2 legyen. Hány másodperccel legyen egyenlő egy *tick*? Ismert, hogy 1 font 45,4 dkg-mal, 1 láb pedig 30,5 cm-rel egyenlő. **(10 pont)**



Megoldás:

$$1\,\frac{\text{font}\cdot\text{láb}}{\text{tick}^2} = 1\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$1\,\frac{(45{,}4\ \text{dkg})\cdot(30{,}5\ \text{cm})}{\text{tick}^2} = 1\,\frac{(100\ \text{dkg})\cdot(100\ \text{cm})}{\text{s}^2}$$

(5 pont)

$$\frac{45{,}4\cdot 30{,}5}{\text{tick}^2} = \frac{100\cdot 100}{\text{s}^2}$$

$$1\ \text{tick} = \sqrt{\frac{45{,}4\cdot 30{,}5}{100\cdot 100}}\ \text{s} =$$

$$= \underline{\underline{0{,}372\ \text{s}}}.$$

(5 pont)

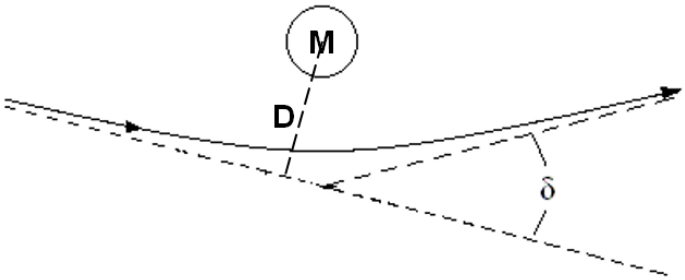
2. A fizika történetének egyik kiemelten izgalmas és fontos felfedezése, hogy egy fénysugár, amely egy M tömegű csillagtól D távolságra haladna el, az M tömeg gravitációs erőterében δ szögű irányváltozással eltérül (lásd az ábrán).
Vegyük számba, hogy milyen fizikai tényezőktől függ a δ szögeltérülés (mindegyiknél megadjuk a mennyiség jelét és az SI mértékegységét is):
a csillag M tömege, $[M] = kg$,

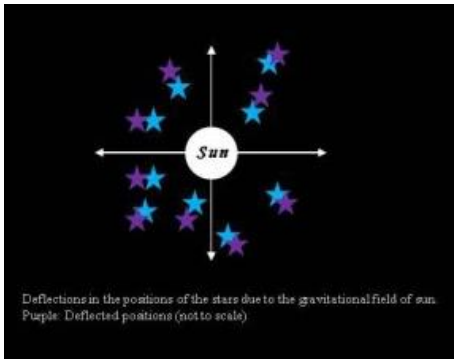
a G gravitációs (Cavendish) állandó, $[G] = \dfrac{m^3}{kg\cdot s^2}$,

a c fénysebesség, $[c] = \dfrac{m}{s}$,

a D távolság, $[D] = m$.

A δ szögeltérülést SI-ben radiánban mérjük, amely mértékegység nélküli mennyiség $[\delta] = 1$, mivel két hosszúság mértékegységű mennyiség (az ívhossz és sugár) hányadosaként definiáljuk.
Próbáljunk előállítani a fenti négy fizikai mennyiségből – szorzás, osztás és hatványozás műveletekkel – egy Y mértékegység nélküli ($[Y] = 1$) mennyiséget, amelyre $\delta \propto Y$, azaz a szögeltérés arányos kell, hogy legyen ezen Y mennyiséggel! (A konstrukció során figyeljünk arra is, hogy fizikai képünk alapján a fenti mennyiségek melyike miként befolyásolhatja – növelheti, vagy csökkentheti – az eltérülés mértékét!)





(Megjegyzés: a klasszikus (Newtoni) fizika törvényeiből levezetve $\delta = 2 \cdot Y$, míg Einstein általános relativitáselmélete alapján $\delta = 4 \cdot Y$ adódik. A Nap közelében elhaladó fénysugár elhajlására Eddington által elvégzett pontos mérések Einstein által kapott értékkel esnek egybe, ez az általános relativitáselmélet egyik fontos kísérleti igazolása.) **(10 pont)**

Megoldás:

A legegyszerűbb mértékegység nélküli (dimenziótlan) kifejezés, amelyet a négy mennyiségből elő lehet állítani:

$$Y = \frac{G \cdot M}{D \cdot c^2}.$$ *(10 pont)*

Illetve ennek a reciproka is nyilván dimenziótlan, de fizikai szemlélet alapján az eltérülés mértéke nő a tömeggel, de csökken a távolsággal, tehát a fenti kifejezés a megfelelő.

Megjegyzés:

Általánosan az ilyen típusú megfontolásokat dimenzióanalízisnek nevezzük. Keressük tehát az *Y* mennyiséget (szorzás, osztás és hatványozás műveletekkel) a következő alakban:

$Y = M^x \cdot G^y \cdot c^z \cdot D^v$,

ami a mértékegységekre vonatkozóan:

$$[Y] = 1 = [M]^x \cdot [G]^y \cdot [c]^z \cdot [D]^v = kg^x \cdot \left(\frac{m^3}{kg \cdot s^2}\right)^y \cdot \left(\frac{m}{s}\right)^z \cdot m^v = kg^{(x-y)} \cdot m^{(3y+z+v)} \cdot s^{(-2y-z)}$$

egyenletre vezet, azaz az alábbi:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3y + z + v = 0 \\ -2y - z = 0 \end{cases}$$

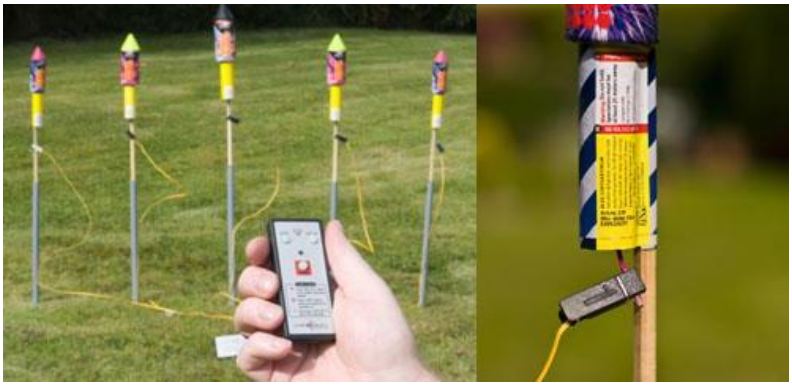
egyenletrendszerre, amely (lévén 4 változóra csak 3 egyenletünk) határozatlan, így például *x*-el kifejezve:

$$\begin{cases} y = x \\ z = -2x \\ v = -x \end{cases}$$

Legegyszerűbb (és a fizikai képünknek is megfelelő) megoldás az x = 1, így y = 1, z = -2, v = -1, tehát:

$$Y = \frac{G \cdot M}{D \cdot c^2}$$

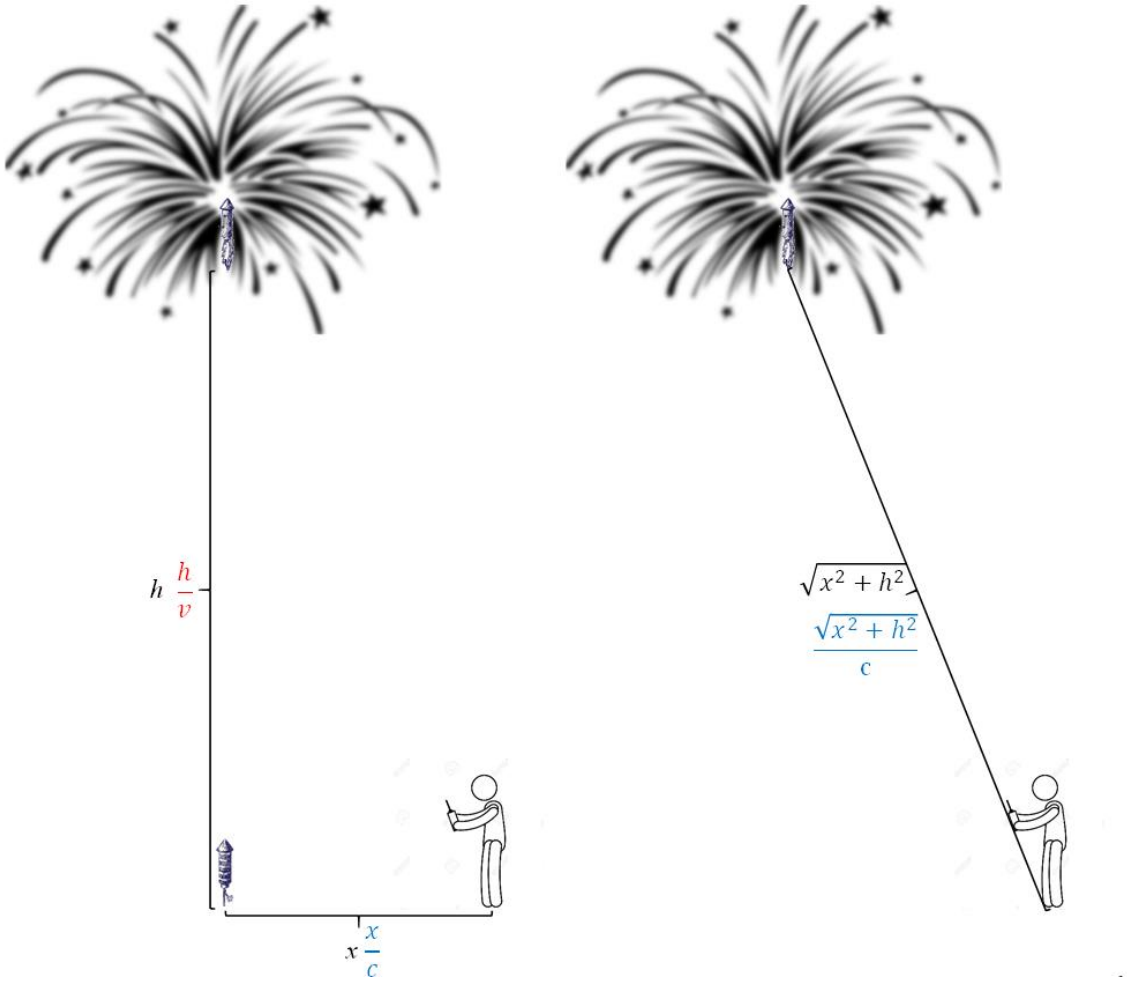
3. Aladár tűzijáték-rakétákkal játszik. A rakéták függőlegesen mozognak, és pillanatszerűen indulnak el, azaz elhanyagolható idő alatt érik el állandó emelkedési sebességüket, majd indításuk után egy bizonyos idővel felrobbannak. Aladár távirányítót használ, és biztonságos 20 m távolságra áll az indítás helyétől. Az indítás hangja után 1 másodperccel látja a robbanást, majd további 0,2 s elteltével hallja is a robbanást. Mekkora a rakéták sebessége? (Aladár testmagassága a rakéták által elért magassághoz képest elhanyagolható.) **(15 pont)**



Megoldás:

Ismert mennyiségek: x = 20 m t_1 = 1 s, t_2 = 0,2 s és c = 340 m/s (hangsebesség). Jelölés: a rakéta h magasságig jut el, sebessége v. Keressük: v-t.

Az ábrán a geometriai méreteket feketével írtuk, a hang terjedési idejét kékkel, a rakéta menetidejét pirossal írtuk.



(a) (b)

Aladár majdnem pontosan akkor látja a robbanást, amikor az ténylegesen megtörténik a rakéta emelkedésének legmagasabb pontján [(a) ábra].

$$t_1 = \text{az emelkedés időtartama} - \text{az indítás hangjának terjedési ideje} = \frac{h}{v} - \frac{x}{c}$$

(5 pont)

A robbanás képének és hangjának megérkezése között eltelt idő a t_2 [(b) ábra].

$$t_2 = \text{a robbanás hangjának terjedési ideje a rakéta helyétől Aladárig} = \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{c}$$

(4 pont)

A második egyenletből:

$$h = \sqrt{(c \cdot t_2)^2 - x^2} = \sqrt{\left(340\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}2\ \text{s}\right)^2 - (20\ \text{m})^2} = \underline{\underline{64{,}99\ \text{m}}}.$$

(3 pont)

Ezt használva az első egyenletből:

$$v = \frac{h}{t_1 - \frac{x}{c}} = \frac{64{,}99\ \text{m}}{1\ \text{s} - \frac{20\ \text{m}}{340\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}} =$$

$$= \underline{\underline{69{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

(3 pont)

4. Egy egyenes útszakaszon egyforma gépkocsik haladnak v = 50 km/h sebességgel és azonos követési távolsággal. A gépkocsik legrövidebb fékútja is megegyezik.

a) Egy elöl haladó gépkocsi féklámpájának kigyulladása és a mögötte haladó lassulásának kezdete közt eltelt idő a gépkocsivezető cselekvési ideje. Ez alatt a gépkocsi lassulása zérus. A vezetők cselekvési ideje t_{cs} = 2 s.
Mekkora utat tesz meg egy gépkocsi a cselekvési idő alatt? (**2 pont**)

b) Mekkora a fékút, azaz mekkora utat tesz meg egy gépkocsi a fékezés során, ha lassulása a = 5 m/s^2? (**2 pont**)

c) Legalább mekkora legyen a követési távolság, hogy az egyik gépkocsi hirtelen fékezésekor a mögötte haladó ütközés nélkül meg tudjon állni? A gépkocsik a saját féklámpájuk kigyulladásakor kezdenek el lassulni. (**1 pont**)

d) A gépkocsik hossza L = 5 m. Legföljebb hány gépkocsi haladhat át óránként egy adott útszelvényen a megadott sebességgel, ha betartják a követési távolságot? (**5 pont**)

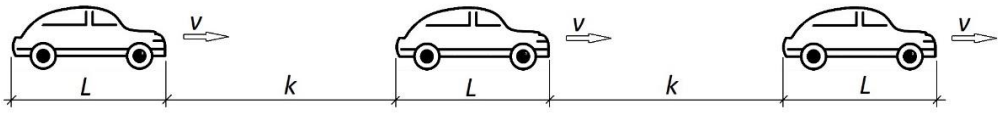
Megoldás:

a) A cselekvési idő alatt megtett út *(2 pont):* $s_{cs} = vt_{cs} = \frac{50/3{,}6\,\text{m/s}}{2\,\text{s}} \approx 27{,}78\,\text{m}$.

b) A fékút *(2 pont)*: $s_f = \frac{v^2}{2a} = \frac{13{,}89^2}{2\times 5} \approx 19{,}29\,\text{m}$.

c) A követési távolság megegyezik a cselekvési idő alatt megtett úttal, mert a fékező járművek fékútja megegyezik *(1 pont)*: $k = s_{cs} \approx 27{,}78\,\text{m}$.

d) Akkor halad át legtöbb gépkocsi, ha egyik sem fékez, és mindegyik között a távolság legföljebb a követési távolság. *(1 pont)*



A gépkocsik és a gondolatban hozzájuk képzelt követési távolságuk v sebességgel haladnak. Ha t idő alatt N darab gépkocsi halad át egy adott útszelvényen, a konvoj hossza megegyezik a t idő alatt v sebességgel megtett úttal:

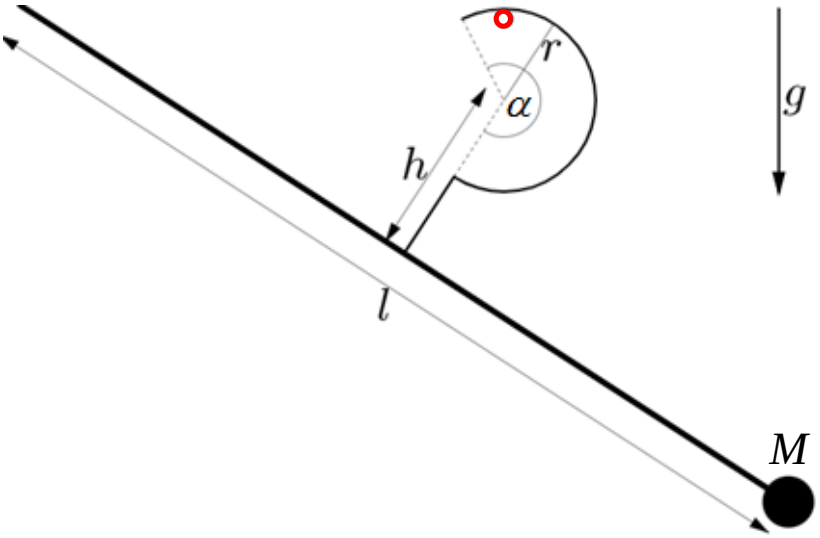
$$N(L+k) = vt\,.$$

Innen az időegység alatt áthaladó gépkocsik száma legföljebb *(3 pont)*:

$$n = \frac{N}{t} = \frac{v}{L+k} = \frac{50\,\text{km/h}}{5\,\text{m}+27{,}78\,\text{m}} = \frac{50\,000\,\text{m/h}}{5\,\text{m}+26{,}23\,\text{m}} \approx 1525{,}4\,\frac{\text{darab}}{\text{óra}}\,.$$

A követési távolságot betartva legföljebb 1525 gépkocsi haladhat át óránként. *(1 pont)*

5. Mekkora súlyt erősíthetünk az ábrán látható egyszerű vállfa végére anélkül, hogy a vállfa lefordulna onnan, ahova akasztottuk (a kis karikával jelzett pl. szögre)? A vállfa kampós részét nagyon könnyű drótból hajlították, és a kampó egyenes vége egy fa keresztrúdhoz csatlakozik, mely 30 cm hosszú és 200 g tömegű. A kampó íves része 2,5 cm átmérőjű körívbe van hajlítva, aminek középponti szöge 240°. Az ív középpontja és a fa keresztrúd közötti távolság 5 cm. Minden súrlódás elhanyagolható. **(20 pont)**

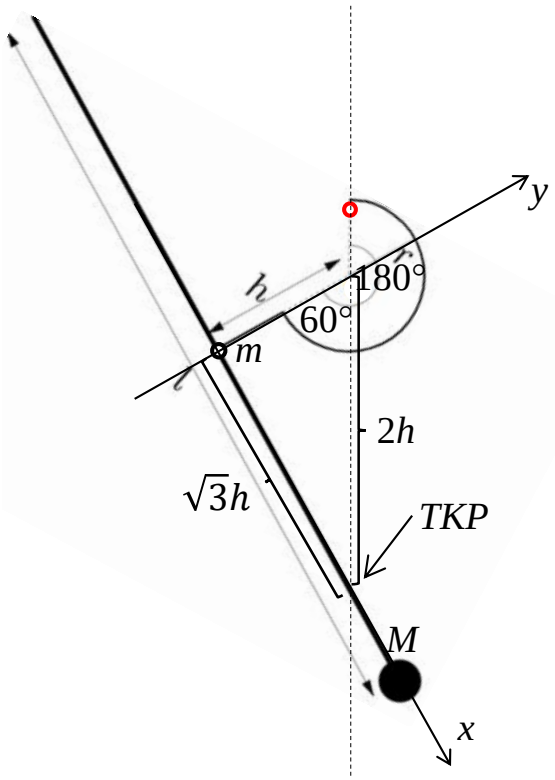


Megoldás:

Ismert mennyiségek: l = 30 cm, m = 200 g, r = 2,5 cm, α = 240°, h = 5 cm. Keressük: M-et. Ha a vállfának súrlódásmentesen kell megállnia a szögön, akkor a lefordulás határesete az, amikor a kampó íves része a legvégével támaszkodik a szögön, és az érintkező rész vízszintes

irányú. Ilyenkor a *M* tömegű súly és a vállfa *m* tömegű keresztrúdjának közös tömegközéppontja (*TKP*) pontosan a szög alatt van.

(7 pont)



(5 pont)

Ha ilyenkor a súlyt még megnövelnénk, akkor a tömegközéppont jobbra tolódna, az egyensúlyhoz pedig a vállfa az óramutató járásával egyezően elfordulna. Mivel azonban a súrlódásmentesen támaszkodó kampó érintkező része jobbra lejt, ezért a rendszer lecsúszna a szögről.

Határozzuk meg, hogy milyen *M* tömeg esetén van az ábrán látható helyen a tömegközéppont. Használva a berajzolt *x*–*y* koordináta-rendszert a tömegközéppont *x*-koordinátájának egyenlete a következő:

$$\frac{m \cdot 0 + M \cdot \frac{l}{2}}{m + M} = \sqrt{3}h$$

(5 pont)

amit átrendezve az eredmény

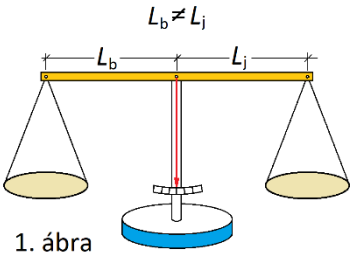
$$M = \frac{\sqrt{3}h}{\frac{l}{2} - \sqrt{3}h} m = \frac{\sqrt{3} \cdot 5\ cm}{\frac{30\ \text{cm}}{2} - \sqrt{3} \cdot 5\ cm} 200\ \text{g} =$$

$$= \underline{\underline{273{,}2\ \text{g}}}.$$

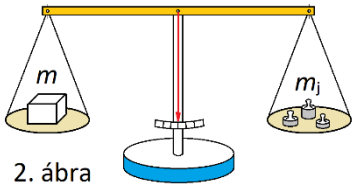
(3 pont)

6. Egy kétkarú mérleg karjainak hossza és tömege nem pontosan azonos. Egy test tömegét a következő módon mérjük meg egy ilyen mérleggel.
(Ez a Gauss-féle felcserélési módszer.)

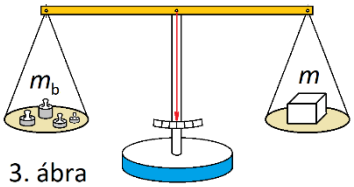
1. Megállapítjuk a terheletlen mérleg egyensúlyi helyzetét (1. ábra).
2. Az ismeretlen m tömegű testet a bal serpenyőre helyezzük, majd a jobb serpenyőre helyezett m_j tömegű mérősúllyal kiegyensúlyozzuk a mérleget, beállítjuk az előző egyensúlyi helyzetet (2. ábra).
3. Az ismeretlen m tömegű testet áthelyezzük a jobb serpenyőre, és a bal serpenyőre helyezett m_b tömegű mérősúllyal ismét kiegyensúlyozzuk a mérleget, ismét beállítjuk az egyensúlyi helyzetet (3. ábra).



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Adatok:

A mérlegkar teljes hossza: $L_b + L_j = 400$ mm.

Bal serpenyőre helyezett mérősúly tömege: $m_b = 125$ g,

Jobb serpenyőre helyezett mérősúly tömege: $m_j = 123$ g.

a) Mekkora a test tömege? (**10 pont**)

b) Mekkora a mérlegkarok hossza? (**5 pont**)

Megoldás:

a) A terheletlen mérleg kiegyensúlyozott állapotban van, így a mérlegkarra ható erők forgatónyomatékának eredője zérus. *(2 pont)*

A 2. és 3. esetben is igaz az, hogy a mérlegkarra ható erők nyomatéka zérus, azaz *(4 pont):*

$$m g L_b = m_j g L_j, \qquad m_b g L_b = m g L_j.$$

Egyszerűsítsünk:

$$m L_b = m_j L_j, \qquad m_b L_b = m L_j.$$

Osszuk el a két egyenletet egymással, és fejezzük ki a keresett tömeget *(4 pont)*:

$$\frac{m L_b}{m_b L_b} = \frac{m_j L_j}{m L_j}, \qquad m = \sqrt{m_b m_j} = \sqrt{125\text{g} \times 123\text{g}} \approx 123{,}996\text{g} \approx 124\text{g}.$$

b) Szorozzuk össze a két egyenletet, és fejezzük ki a karok arányát *(2 pont)*:

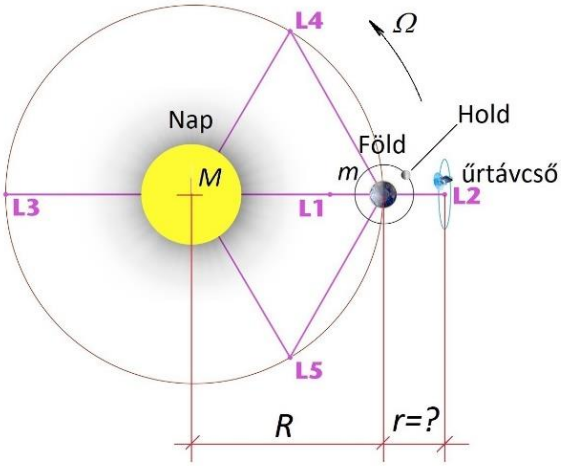
$$m L_b = m_j L_j, \qquad m_b L_b = m L_j, \qquad m L_b m_b L_b = m_j L_j m L_j,$$

$$\frac{L_b}{L_j} = \sqrt{\frac{m_j}{m_b}} = \sqrt{\frac{123}{125}} \approx 0{,}99197 \approx 0{,}992, \qquad L_b \approx 0{,}992 L_j.$$

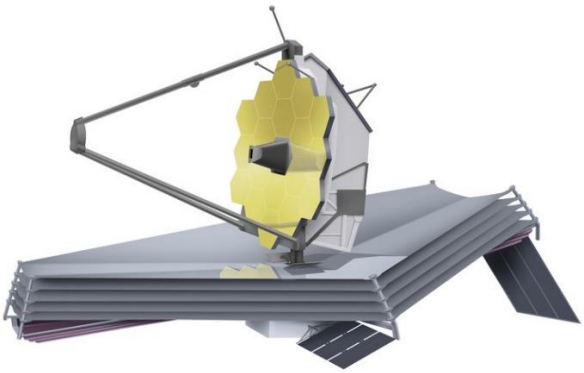
A két kar hosszának összege ismert. A két egyenletből a karok hossza *(3 pont)*:

$$L_b + L_j = 400\,\text{mm}, \qquad 1{,}992 L_j = 400\,\text{mm}, \qquad L_j = 200{,}81\,\text{mm}, \qquad L_b = 199{,}19\,\text{mm}.$$

7. Két, nagytömegű égitest librációs pontjai (Lagrange-pontjai) azok a pontok a világűrben, ahol egy kis tömegű harmadik test (pl. űrszonda, űrtávcső) nyugalomban van a két nagytömegű égitesthez viszonyítva. (Lagrange 1772-ben kimutatta, hogy minden égitest-párosnak 5 librációs pontja van.) A Nap-Föld rendszer librációs pontjait láthatjuk a mellékelt ábrán.
A 2021. dec. 25-én útjára bocsátott Webb űrtávcső az L2 librációs pont körül kering a Napot a Földdel összekötő egyenesre jó közelítéssel merőleges síkban.



A Nap-Föld rendszer Lagrange pontjai



A Webb űrtávcső az L2 pont körül kering

A következő egyszerűsítő feltételek mellett határozzuk meg az L2 librációs pont Földtől mért távolságát.

- A Napot és a Földet tekintsük pontszerűnek.
- A Naphoz rögzített vonatkoztatási rendszert tekintsük inerciarendszernek.
- Tömegek: Nap: $M = 1{,}983\text{x}10^{30}$ kg, Föld: $m = 5{,}974\text{x}10^{24}$ kg.
- A Nap, a Föld és az L2 pont egy egyenesen fekszik, amely állandó Ω szögsebességgel forog a Nap körül.
- A Föld $R = 149{,}6\text{x}10^{6}$ km, az L2 pont $R + r$ sugarú körpályán kering a Nap körül. A rajz nem méretarányos.
- Az L2 pontban levő testre ható, a Nap irányába mutató centripetális erő megegyezik a Nap és a Föld gravitációs vonzóerejével.
- Csak a Nap és a Föld gravitációs vonzóerejét vegyük figyelembe (a többi égitest hatását hanyagoljuk el).

a) Mekkora az L2 pont Földtől mért r távolsága? (**15 pont**)
b) A Nap-Föld rendszer tömegközéppontja milyen távol van a Nap tömegközéppontjától? (**5 pont**)

A számítás során használja ki a következő közelítést: $\dfrac{1}{(R+r)^2} \approx \dfrac{1}{R^2}\left(1-2\dfrac{r}{R}\right)$.

Megoldás:
a) A feladat szerint az L2 pontban levő testre ható gravitációs erők eredője egyenlő a testre ható centripetális erővel *(5 pont)*:

$$G\frac{M\mu}{(R+r)^2}+G\frac{m\mu}{r^2}=F_{\text{cp}}, \qquad \text{ahol} \qquad F_{\text{cp}}=\mu(R+r)\Omega^2,$$

$$G\frac{M}{(R+r)^2}+G\frac{m}{r^2}=(R+r)\Omega^2.$$

A Földre ható gravitációs erő egyenlő a Földre ható centripetális erővel. Innen a szögsebesség négyzete *(5 pont)*:

$$G\frac{Mm}{R^2}=mR\Omega^2, \qquad \Omega^2=G\frac{M}{R^3}.$$

Visszahelyettesítve a szögsebesség négyzetét az előző egyenletbe, és egyszerűsítve:

$$G\frac{M}{(R+r)^2}+G\frac{m}{r^2}=(R+r)G\frac{M}{R^3}, \qquad \frac{1}{(R+r)^2}+\frac{m/M}{r^2}=(R+r)\frac{1}{R^3}.$$

Alkalmazzuk a megadott közelítő összefüggést *(5 pont)*:

$$\frac{1}{R^2}\left(1-2\frac{r}{R}\right)+\frac{m/M}{r^2}\approx(R+r)\frac{1}{R^3}, \qquad 1-2\frac{r}{R}+\frac{m}{M}\frac{R^2}{r^2}\approx(R+r)\frac{1}{R}=1+\frac{r}{R},$$

$$\frac{m}{M}\frac{R^2}{r^2}\approx 3\frac{r}{R}, \qquad r\approx R\sqrt[3]{\frac{m}{3M}}, \qquad r\approx 149,6\times10^6\,\text{km}\times\sqrt[3]{\frac{5,974\times10^{24}}{3\times1,983\times10^{30}}}\approx 1,488\times10^6\,\text{km}.$$

(Az eredeti 5. fokú egyenlet pontos megoldásával kapott érték 1,493 millió km.)

b) A Nap-Föld rendszer tömegközéppontjának távolsága a Nap tömegközéppontjától: *(5 pont)*:

$$Ms=m(R-s), \qquad s=R\frac{m}{m+M}=149,6\times10^6\,\text{km}\frac{5,974\times10^{24}}{5,974\times10^{24}+1,983\times10^{30}}\approx 448\,\text{km}.$$

8. Az emberiség egyik jövőbeli nagy tudományos-technikai (vagy inkább tudományos-fantasztikus) terve, hogy a Föld két átellenes felszíni pontja között „csőpostát”, azaz egy – a Föld középpontján áthaladó – egyenes alagútba helyezett csövet fektessen. Mennyi idő alatt ér át a másik oldalra a csőposta egyik végén beleejtett (extrém viszonyok elviselésére tervezett) kapszula? (A csőben légritkított teret tartanak fent, így a mozgást akadályozó erők elhanyagolhatók.) Mennyi idő alatt tudná eljuttatni a célba egy 1000 km/h sebességű repülőgép a kapszulát?

A Földet tekintse jó közelítéssel homogén anyagsűrűségű gömbnek, a szükséges adatokat keresse ki a Függvénytáblázatból!

Fontos segítség: homogén anyagsűrűségű gömb esetén a gömb középpontjától *r* távolságban az *m* tömegű kapszulára ható erő csak az *r* sugarú gömb *M(r)* tömegével való gravitációs kölcsönhatásból származik. Az ebből levezethető gravitációs erő távolságfüggése nem emlékezteti egy másik jól ismert és középiskolában is részletesen tárgyalt erőhatásra? **(20 pont)**

Megoldás:

Amikor a kapszula *r* távolságra van a Föld középpontjától, az *m* tömegű kapszulára ható erő az *r* sugarú gömb *M(r)* tömegével való gravitációs kölcsönhatásból származik, amely gömb tömegközéppontja továbbra is a Föld középpontjában van, tehát:

$$F(r) = G \cdot \frac{m \cdot M(r)}{r^2},$$ *(3 pont)*

amelyben a ρ sűrűségű, *r* sugarú gömb tömege:

$$M(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho .$$ *(1 pont)*

A sűrűséget a Föld M_F tömegéből és R_F sugarából fejezhetjük ki:

$$M_F = \frac{4\pi}{3} R_F^3 \rho \rightarrow \rho = \frac{3M_F}{4\pi R_F^3},$$ *(1 pont)*

így:

$$M(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot \frac{3M_F}{4\pi R_F^3} = M_F \left(\frac{r}{R_F}\right)^3 .$$

Ezt visszaírva a gravitációs erőbe:

$$F(r) = G \cdot \frac{m \cdot M_F \left(\frac{r}{R_F}\right)^3}{r^2} = G \frac{m \cdot M_F \cdot r}{R_F^3},$$ *(3 pont)*

az erőhatás irányát is figyelembe véve az alábbi alakba írhatjuk át:

$$F(r) = -D \cdot r,$$

azaz rugóerő jellegű, ahol $D = \frac{G \cdot m \cdot M_F}{R_F^3}$. *(5 pont)*

Ez fontos észrevétel, mivel ismert, hogy rugóerő esetén az *m* tömegű test harmonikus rezgőmozgást végez:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

periodusidővel, ami jelen esetben:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left(\frac{G \cdot m \cdot M_F}{R_F^3}\right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_F^3}{G \cdot M_F}} = 5061 \text{ s}$$ *(5 pont)*

A kapszula az utat a Föld két átellenes pontja között T/2 alatt teszi meg, tehát mintegy <u>42 perc alatt</u>.

A Föld két felszíni pontja közötti legrövidebb út a két ponton átmenő főkör ív, jelen esetben tehát a repülőgép számára a megteendő út a Föld kerületének fele, amihez szükséges idő:

$$t = \frac{\pi \cdot R_F}{v_{repülő}} = \frac{\pi \cdot 6{,}371 \cdot 10^3 km}{10^3 \, km/h} = 20 \text{ h}$$ *(2 pont)*

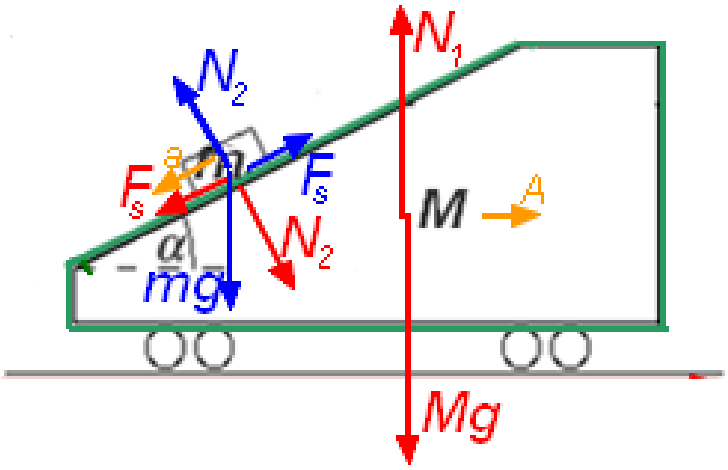
Tehát <u>a repülőgépnek ugyanerre 20 óra szükséges</u>.

9. M = 7600 kg tömegű autómentő tréler egy m = 1600 kg tömegű autót szállít. A tréler lejtős rámpája α = 30° szöget zár be a vízszintessel. A tréler vezetője – aki beugrott egy presszóba egy kávét meginni – sajnos két hibát is vétett. Egyrészt rosszul rögzítette a (behúzott kézifékű) gépkocsit a rámpa tetején, amely el kezd lefelé csúszni a lejtőn, másrészt nem húzta be a tréler kézifékét, így az szabadon gördülhet a vízszintesnek tekinthető talajon. A kocsi és a rámpa közötti csúszási súrlódási tényező 0,4, a tréler talajon való gördülésénél a mozgást akadályozó erőt elhanyagolhatjuk. Mekkora (rámpához képesti) gyorsulással csúszik lefelé a gépkocsi és mekkora gyorsulással mozog a tréler a talajhoz képest? Készítsen ábrát, amelyre jól látható módon berajzolja a trélerre és az autóra ható erőket! **(30 pont)**

Megoldás:

Adatok: M = 7600 kg, m = 1600 kg, α = 30°, μ = 0,4, g = 10 m/s^2.

Az alábbi ábrán berajzoltuk a testekre ható erőket. A tréler A gyorsulását vízszintesen jobbra, a gépkocsi a gyorsulását pedig a trélerhez képest lejtőirányban lefelé vesszük pozitívnak (fizikai szemlélet alapján ezek kézenfekvők, de nem okoz semmi gondot, ha ellentétesen vesszük fel az irányokat, amennyiben a továbbiakban konzekvensen dolgozunk, akkor a gyorsulásokra negatív érték adódna). Az áttekinthetőség érdekében a gépkocsira ható erőket kék színnel, a trélerre hatókat pedig piros színnel rajzoltuk be. A gépkocsira az mg súlyerő, az N_2 felületi kényszererő (tartóerő) és az F_s súrlódási erő hat, míg a trélerre az N_2 kényszererő és az F_s súrlódási erő ellenerői (hatás-ellenhatás törvénye!), valamint az Mg súlyerő és a talaj N_1 tartóereje hat. *(a helyes erőábráért 8 pont)*



Írjuk fel először a tréler mozgásegyenleteit!
Függőleges irányban (nulla a gyorsulás):

$$M \cdot 0 = N_1 - M \cdot g - N_2 \cdot \cos\alpha - F_s \cdot \sin\alpha$$ *(3 pont)*

Vízszintes irányban (a gyorsulás A):

$$M \cdot A = N_2 \cdot \sin\alpha - F_s \cdot \cos\alpha$$ *(3 pont)*

Írjuk fel a gépkocsi mozgásegyenleteit!
Lejtőre merőleges irányban:

$$m\cdot(-A\cdot\sin\alpha)=N_2-mg\cdot\cos\alpha \qquad (*)$$ *(3 pont)*

Lejtőirányban:

$$m\cdot(a-A\cdot\cos\alpha)=mg\cdot\sin\alpha-F_s \qquad (**)$$ *(3 pont)*

Az első egyenlet a feladat kérdései szempontjából mellékes (csak az N_1 tartóerőt határozza meg), a másik háromba pedig a súrlódási erő $F_s=\mu\cdot N_2$ definícióját is felhasználva *(2 pont)*:

$$M\cdot A=N_2\cdot\sin\alpha-\mu\cdot N_2\cdot\cos\alpha \qquad (1)$$
$$m\cdot(-A\cdot\sin\alpha)=N_2-mg\cdot\cos\alpha \qquad (2)$$
$$m\cdot(a-A\cdot\cos\alpha)=mg\cdot\sin\alpha-\mu\cdot N_2 \qquad (3)$$

(tehát ha a fentivel ekvivalens egyenletrendszert felírja, akkor 3+3+3+3+2 =14 pontot kap)

Vegyük észre, hogy (1) és (2) kétismeretlenes egyenletrendszer N_2 és A változókra. Az (1) egyenletből:

$$N_2=\frac{M\cdot A}{\sin\alpha-\mu\cdot\cos\alpha},$$ *(2 pont)*

amelyet (2)-be helyettesítve kifejezhetjük A gyorsulást:

$$A=\frac{mg\cdot\cos\alpha}{m\cdot\sin\alpha+\dfrac{M}{\sin\alpha-\mu\cdot\cos\alpha}}=0{,}276\ \frac{m}{s^2}.$$ *(2 pont)*

Ennek birtokában már N_2 is megvan:

$$N_2=13636\ \mathrm{N}$$ *(2 pont)*

Ezeket (3)-ba helyettesítve megkapjuk a gyorsulást is:

$$a=A\cdot\cos\alpha+g\cdot\sin\alpha-\frac{\mu\cdot N_2}{m}=1{,}83\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$ *(2 pont)*

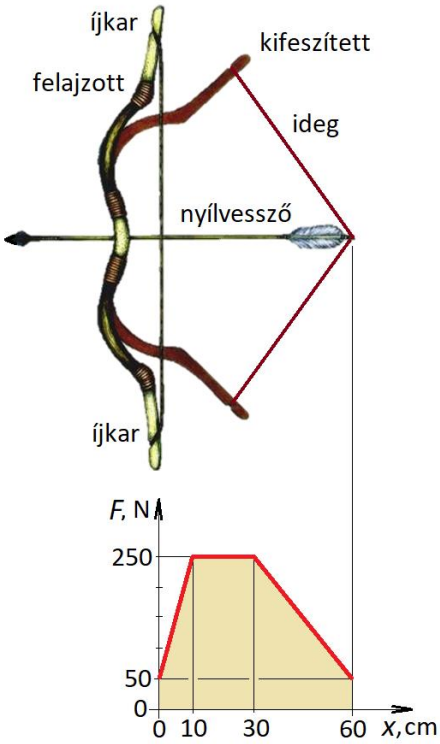
<u>Tehát a tréler 0,276 m/s^2 gyorsulással mozog előre (az ábránkon jobbra), a gépkocsi pedig 1,83 m/s^2 gyorsulással csúszik a tréler rámpáján lefelé.</u>

Megjegyzés: a feladat megoldható úgy is, hogy a gépkocsi mozgásegyenleteit a trélerhez rögzített koordináta rendszerben írjuk fel. Ekkor a (*) és (**) egyenletekben az A-val arányos ún. tehetetlenségi erőkomponensek a jobb oldalon jelennek meg:

$$0=N_2-mg\cdot\cos\alpha+m\cdot A\cdot\sin\alpha \qquad (*)$$

$$m\cdot a=mg\cdot\sin\alpha-F_s+m\cdot A\cdot\cos\alpha \qquad (**)$$

10. A mellékelt ábra felső részén egy visszacsapó íjat láthatunk felajzott, illetve kifeszített állapotban. Az alsó ábrarészen az íj egyszerűsített erődiagramját ábrázoltuk (a feszítőerő függését a nyílvessző elmozdulásától).



a) Mekkora munkával lehet a felajzott íjat kifeszíteni 60 cm-re? (**8 pont**)

b) A nyílvessző tömege 50 gramm. Mekkora sebességgel hagyja el a nyílvessző az íjat? (A légellenállást és az íj belső súrlódási veszteségét hanyagoljuk el.) (**2 pont**)

c) Legföljebb mekkora távolságra lehet ezzel az íjjal lőni, ha a légellenállást elhanyagoljuk? $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$. (**3 pont**)

d) Miért előnyös, hogy az íj megfeszítésének végén a feszítőerő fokozatosan csökken? (**2 pont**)

Megoldás:

a) A munkadiagram négy részből áll, az eredő munka ezek összege *(8 pont)*:

$$W = \frac{200\,\mathrm{N}}{2}0{,}1\,\mathrm{m} + 200\,\mathrm{N}\times 0{,}2\,\mathrm{m} + \frac{200\,\mathrm{N}}{2}0{,}3\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{N}\times 0{,}6\,\mathrm{m} = 110\,\mathrm{J}\,.$$

b) A nyílvessző kezdősebessége a munkatétel alapján *(2 pont)*:

$$W = \frac{1}{2}mv^2\,, \qquad v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 110\,\mathrm{J}}{0{,}05\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{4400}\,\mathrm{m/s} \approx 66{,}33\,\mathrm{m/s} \approx 239\,\mathrm{km/ó}\,.$$

c) Legnagyobb a lőtávolság a vízszintessel 45°-os szögben irányított lövéssel *(3 pont)*:

$$x = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{4400 \sin\left(2\times 45°\right)}{10} = 440\,\mathrm{m}\,.$$

d) A feszítőerőt az íjász fejti ki a két karjával. A kisebb feszítőerő pontosabb célzást tesz lehetővé. *(2 pont)*

11. Dénes banánt pakol egy zacskóba egy üzletben, és mielőtt fizetne, az az ötlete támad, hogy ha a zacskót héliummal töltené meg levegő helyett, akkor a mérleg kevesebbet mutatna, és kevesebbet is kellene fizetnie. Az üzletben úgyis önkiszolgáló a pénztár, senki nem figyelne fel a héliumtól puffadó zacskóra. Határozzuk meg, hogy mennyibe kellene kerülnie 1 kg banánnak, hogy Dénes kis csínye anyagilag megérje. Tegyük fel, hogy a hélium légköri nyomású a zacskóban és hogy a banán sűrűsége a víz sűrűségével közelíthető. Egy kg hélium ára nagyipari kiszerelésben kb. 11 000 Ft. **(20 pont)**

Megoldás:

Ismert mennyiségek: a hélium egységára, jelölhetjük a következőképpen: x_{He} = 11000 Ft/kg, továbbá a hélium és a levegő anyagi jellemzői. Keressük: x_{b}-t (a banán egységárát).

A művelet során úgy lehet haszonra szert tenni, hogy a héliummal töltött zacskó felhajtóereje miatt a mérlegről a ténylegesnél kisebb tömeg olvasható le, és ennek a valódi tömegtől való eltérése a banán egységárával számítva megtakarítás lesz. Csakhogy a mérés előtt be kell fektetni a héliumba, ami összegszerűen a használt hélium tömegének és a hélium egységárának a szorzata lesz. Az elért haszon feltétele a következő:

$$„\Delta m" \cdot x_{\mathrm{b}} - m_{\mathrm{He}} \cdot x_{\mathrm{He}} > 0$$

(4 pont)

Az idézőjelek a „Δm" körül azt jelentik, hogy természetesen nem változik a banán tömege, hanem a leolvasott menyiségben van különbség a héliumos zacskóban és a közönséges zacskóban történő mérés között. A „Δm"-hez társítható súlyerő a kétféle mérés során fellépő felhajtóerők különbsége csökkentve a zacskóban található hélium súlyával (a hélium nélküli mérés meggondolásánál úgy járunk el a legegyszerűbben, hogy a zacskóbeli levegővel nem is foglalkozunk, mivel annak súlya, és a rá ható felhajtóerő éppen kiejti egymást).

Különböztessük meg a kétféle mérést „B" (mint „becsületes") és „Cs" (mint „csíny") indexekkel, és jelöljük V_{b}-vel V_{z}-vel és V_{He}-mal rendre a banán, a zacskó anyaga és a felhasznált hélium térfogatát, valamint ρ_{lev}-vel a levegő sűrűségét:

$$\begin{aligned} „\Delta m" \cdot g &= F_{\mathrm{fel,Cs}} - F_{\mathrm{fel,B}} - m_{\mathrm{He}} \cdot g \\ &= (V_{\mathrm{b}} + V_{\mathrm{z}} + V_{\mathrm{He}}) \cdot \rho_{\mathrm{lev}} \cdot g - (V_{\mathrm{b}} + V_{\mathrm{z}}) \cdot \rho_{\mathrm{lev}} \cdot g - m_{\mathrm{He}} \cdot g \\ &= V_{\mathrm{He}} \cdot \rho_{\mathrm{lev}} \cdot g - V_{\mathrm{He}} \cdot \rho_{\mathrm{He}} \cdot g \end{aligned}$$

(6 pont)

Az eredményt behelyettesítjük a haszon feltételébe:

$$(V_{\mathrm{He}} \cdot \rho_{\mathrm{lev}} - V_{\mathrm{He}} \cdot \rho_{\mathrm{He}}) \cdot x_{\mathrm{b}} - m_{\mathrm{He}} \cdot x_{\mathrm{He}} = (V_{\mathrm{He}} \cdot \rho_{\mathrm{lev}} - V_{\mathrm{He}} \cdot \rho_{\mathrm{He}}) \cdot x_{\mathrm{b}} - V_{\mathrm{He}} \cdot \rho_{\mathrm{He}} \cdot x_{\mathrm{He}} > 0$$

(4 pont)

Ez utóbbi alakból pedig kijön, hogy

$$x_{\mathrm{b}} > \frac{\rho_{\mathrm{He}}}{\rho_{\mathrm{lev}} - \rho_{\mathrm{He}}} \cdot x_{\mathrm{He}}$$

(3 pont)

tehát a példa szövegezésének megfelelően csakugyan van egy minimális ára a banánnak, ami alatt anyagilag nem éri meg a cselhez folyamodni. A két gáz sűrűségéből képzett tört többféleképpen megkapható, pl. a *Függvénytáblázatokból* való kikeresés és a műveletek elvégzése révén, de kihasználható az is, hogy a sűrűségek (a gázok megegyező állapotjelzői mellett) egyenesen arányosak a móltömegekkel:

$$x_{\mathrm{b}} > \frac{\rho_{\mathrm{He}}}{\rho_{\mathrm{lev}} - \rho_{\mathrm{He}}} \cdot x_{\mathrm{He}} = \frac{M_{\mathrm{He}}}{M_{\mathrm{lev}} - M_{\mathrm{He}}} \cdot x_{\mathrm{He}} = \frac{4\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}}{29\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} - 4\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}} \cdot 11000\,\frac{\mathrm{Ft}}{\mathrm{kg}} = \underline{\underline{1760}}\,\frac{\mathrm{Ft}}{\mathrm{kg}}.$$

(3 pont)

12. Bergengócia egyik jeles egyetemi városában a campus főterén egy szökőkút működik, aminek *N* db egyforma vízköpője van ugyanarra a szivattyúra kötve, mind függőlegesen felfelé vannak irányítva, és *h* magasságig szökik föl belőlük a víz. Egy napon egy kivételével a vízköpők mindegyike teljesen eldugul, miközben a szivattyú időegységenként továbbra is ugyanannyi vizet szállít, mint korábban. Milyen magasra jut így a vízsugár a megmaradt vízköpőből? **(15 pont)**

Megoldás:

Ismert mennyiségek (nem számszerűen, hanem paraméteresen): *N*, *h*. Keressük: *h'*/*h*-t.
Ha az *N* darab vízköpőből csak egy működő marad, miközben a szállított vízmennyiség állandó, akkor a kifolyás sebessége meg fog nőni.

(2 pont)

Az időegységenként szállított víztérfogatot („folyadékhozamot" vagy térfogatáramot, jelölésben q_V-t) az *A* áramlási keresztmetszet és *v* sebesség határozza meg a következőképpen:

$$q_V = A \cdot v$$

(3 pont)

Legyen *A* egy vízköpő keresztmetszete, és *v* a kiáramlás sebessége. Ezekkel a szállított térfogatáram a következő:

$$q_V = N \cdot A \cdot v$$

(2 pont)

A térfogatáram a feladat szerint akkor is ugyanannyi, amikor csak egy vízköpő marad működőképes:

$$q_V = A \cdot v'$$

(2 pont)

A kiáramlás megnövekedett sebessége tehát

$$v' = \left(\frac{N \cdot A}{A}\right) \cdot v = N \cdot v$$

(2 pont)

A *h* magasság, ameddig a vízsugár szökik, a *v* kezdősebességű függőleges hajítás magassága (ami akkor is adódik, ha meggondolásunk során a Bernoulli-egyenletből indulunk ki):

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

(2 pont)

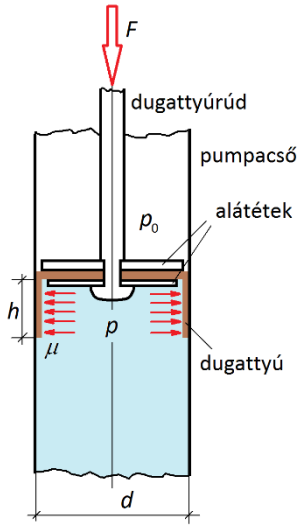
A vízsugár új és a régi magasságának arányára így a következő adódik:

$$\frac{h'}{h} = \frac{\frac{v'^2}{2g}}{\frac{v^2}{2g}} = \frac{v'^2}{v^2} = \frac{(N \cdot v)^2}{v^2} =$$

$$= \underline{\underline{N^2}}$$

(2 pont)

13. A hagyományos kerékpárpumpa részei: hengeres pumpacső, dugattyú, dugattyúrúd, fogantyú, pumpafej, tömlő. A dugattyú bőrből préselt gyűszűalakú rugalmas alkatrész.
Egy kerékpárpumpa csövének átmérője d = 20 mm, a dugattyú magassága h = 8 mm, a rugalmas palást vastagsága elhanyagolható az átmérőjéhez képest.
A dugattyú és a henger közt a súrlódási tényező μ = 0,2. A dugattyú fölötti térben a teljes (abszolút) nyomás p_0 = 100 kPa (ez a légnyomás), a dugattyú alattiban p = 400 kPa.



a) Milyen erő biztosítja a dugattyú és a henger közti tömítést (légzáróságot)? (**2 pont**)
b) Mekkora nagyságú erővel nyomódik a dugattyú palástja a pumpacsőnek? (**3 pont**)
c) Mekkora a súrlódási erő a dugattyú és a csőfal között? (**3 pont**)
d) Mekkora F erő nyomja a dugattyúrudat, amikor az kis sebességgel lefelé mozog? (**3 pont**)
e) Amikor a dugattyút lefelé nyomjuk, tekintsük veszteségi munkának a súrlódási munkát, hasznos munkának a befektetett összes munka és a súrlódási munka különbségét. Hogy aránylik a hasznos munka a befektetett összes munkához, azaz mekkora a hatásfok? (**4 pont**)

Megoldás:

a) A rugalmas dugattyú palástját (szoknyáját) a belső nyomás nekinyomja a pumpacsőnek, ez biztosítja a légzáróságot. *(2 pont)*
b) A nyomóerő *(3 pont)*:

$$F_{\text{ny}} = \pi\, d\, h\, p\,, \qquad F_{\text{ny}} = \pi \times 0{,}02 \times 0{,}008 \times 4 \times 10^5 \approx 201{,}1\,\text{N}\,.$$

c) A súrlódási erő *(3 pont)*:

$$F_{\text{súrl}} = \mu F_{\text{ny}} = 0{,}2 \times 201{,}1\,\text{N} \approx 40{,}2\ \text{N}\,.$$

d) A dugattyúrúd irányú gázerő *(3 pont)*:

$$F_{\text{gáz}} = (p - p_0)\frac{d^2\pi}{4}\,, \qquad F_{\text{gáz}} = (400 - 100)10^3\,\frac{0{,}02^2\pi}{4} \approx 94{,}2\,\text{N}\,.$$

A dugattyúrúdra ható erő, ha a dugattyú lefelé mozog:

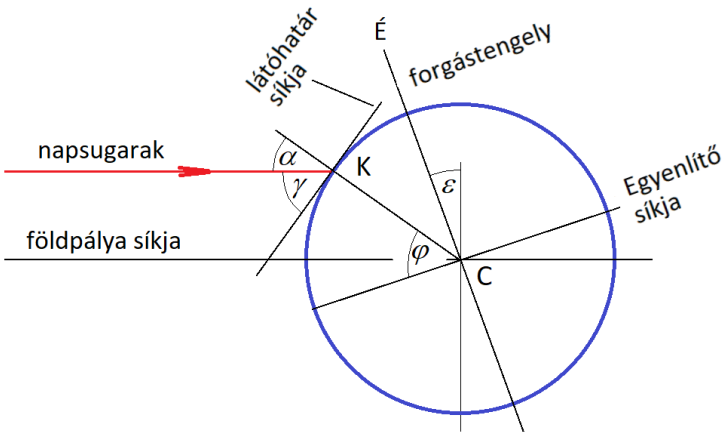
$$F_{\text{le}} = F_{\text{gáz}} + F_{\text{súrl}} = 134{,}5\ \text{N}\,.$$

e) A hasznos munka és az összes munka aránya megegyezik a megfelelő erők arányával *(4 pont)*:

$$\eta = \frac{F_{\text{le}} - F_{\text{súrl}}}{F_{\text{le}}} = \frac{F_{\text{gáz}}}{F_{\text{súrl}} + F_{\text{gáz}}} = \frac{(p - p_0)\frac{d^2\pi}{4}}{\mu\pi\, d\, h\, p + (p - p_0)\frac{d^2\pi}{4}} = \frac{(p - p_0)d}{4\mu\, h\, p + (p - p_0)d}\,,$$

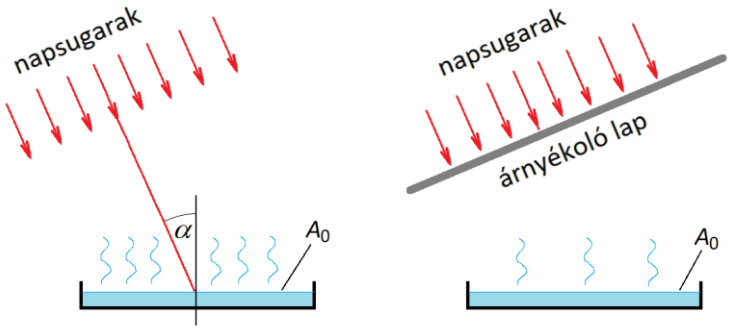
$$\eta = \frac{(400 - 100) \times 20}{4 \times 0{,}2 \times 8 \times 400 + (400 - 100) \times 20} \approx 70{,}1\%\,.$$

14. A Nap besugárzott felületi teljesítménye egy adott helyen az ott levő 1 m^2-es felületre merőlegesen beeső napsugárzási teljesítmény. Egysége W/m^2.
Ezt a felületi teljesítményt felhőmentes időben, a nyári napfordulón, június 21-én délben akarjuk megmérni Kecskeméten, amely az Egyenlítőtől φ = 46,9°-ra északra fekszik. A Föld forgástengelye ε = 23,5°-ot zár be a földpálya síkjával. (Az ábra a Föld helyzetét mutatja a nyári napfordulón a földpálya síkjából nézve.)



a) Hány fokos szögben (γ = ?) látszik a Nap a látóhatár fölött ezen a napon délben, Kecskeméten? **(5 pont)**

A mérést a szabadban, a Nap delelése előtt fél órával kezdjük. Két egyforma, A_0 = 1 dm^2 alapterületű, matt feketére festett tálcába vizet öntünk, majd lemérjük a tömegüket. Ezután a tálcákat egy vízszintes asztallapra helyezzük, és az egyiket egy árnyékoló lappal leárnyékoljuk a napsugarak elől. t = 1 óra múlva ismét megmérjük a tálcák tömegét. Az tapasztaljuk, hogy a napsütötte tálcából Δm = 15 g-mal több víz párolgott el, mint az árnyékban levőből.



A víz párolgáshője L = 2256 J/g. A vízfelszínről visszaverődő sugárzást hanyagoljuk el. Tételezzük föl, hogy a mérés közben a Nap látóhatár fölötti szögmagassága jó közelítéssel a délben mért értékkel egyenlő.
b) Ezekből az adatokból becsüljük meg a Nap besugárzott felületi teljesítményét. **(10 pont)**

Megoldás

a) Merőleges szárú szögek egyenlőségéből következik, hogy *(3 pont)*:

$$\varphi = \alpha + \varepsilon\,, \qquad \alpha = \varphi - \varepsilon = 46{,}9° - 23{,}5° = 23{,}4°\,.$$

A Nap látóhatár fölötti szögmagassága deleléskor *(2 pont)*: $\gamma = 90° - \alpha = 66{,}6°$.

b) Mivel a két tálca helyzete között energetikailag csak az a különbség, hogy az egyiket süti a Nap, a másik pedig árnyékban van, föltételezhetjük, hogy a többletpárolgáshoz szükséges többletenergiát a napsugárzás biztosította. *(2 pont)*

A többletpárolgáshoz szükséges energia *(2 pont)*:

$$Q = \Delta m L\,.$$

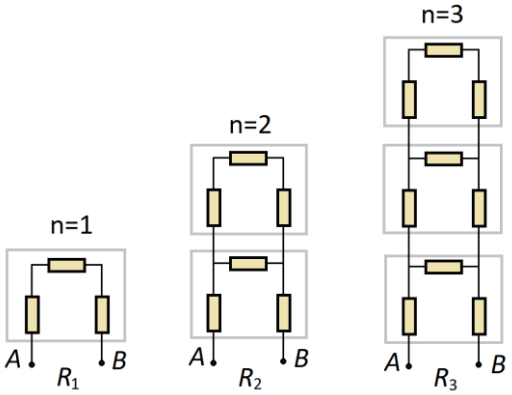
Ha a besugárzott felületi teljesítmény E, a bejelölt A_0 felületre t idő alatt besugárzott energia *(2 pont)*:

$$W = E\,t\,A_0 \cos\alpha\,.$$

A két energia a feltételezésünk szerint megegyezik, ebből a keresett felületi teljesítmény *(4 pont)*:

$$EtA_0 \cos\alpha = \Delta mL\,, \qquad E = \frac{\Delta mL}{tA_0 \cos\alpha} = \frac{15\,\mathrm{g}\times 2256\,\mathrm{J/g}}{3600\,\mathrm{s}\times 0{,}01\,\mathrm{m}^2\times\cos 23{,}4^\circ} \approx 1024\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\,.$$

15. Az ábrán látható létrakapcsolásokban minden ellenállás nagysága R.



a) Mekkora az n = 1, 2, 3 fokú létra A-B pontja közötti R_1, R_2, R_3 eredő ellenállás? **(5 pont)**

b) Adja meg azt a rekurziós összefüggést, amellyel az n fokú létra ellenállásának ismeretében kiszámítható az n+1 fokú létra ellenállása. **(5 pont)**

c) Mekkora az eredő ellenállása a végtelen fokú ($n = \infty$) ellenálláshármasból összeállított létrakapcsolásnak? **(5 pont)**

Megoldás

a) **Egyfokú létra:** a 3 darab ellenállása sorba vannak kötve, ezek eredője *(1 pont)*: $R_1 = 3R$.

Kétfokú létra: a 3 fölső ellenállás eredője 3R, ez párhuzamosan kapcsolódik az 1. fok vízszintes ellenállásához, eredőjük reciproka:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{3R}\,.$$

Ez a részellenállás sorosan kapcsolódik az 1. fok két függőleges ellenállásával, eredőjük *(1 pont)*:

$$R_2 = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{3R}} = 2R + \frac{3}{4}R = \frac{11}{4}R\,.$$

Háromfokú létra: a 3 fölső ellenállás eredője 3R, ez párhuzamosan kapcsolódik a 2. fok vízszintes ellenállásához, eredőjük reciproka:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{3R}\,.$$

Ez a részellenállás sorosan kapcsolódik a 2. fok két függőleges ellenállásához, eredőjük *(1 pont)*:

$$2R + \frac{3}{4}R = \frac{11}{4}R = R_2\,.$$

Ez párhuzamosan kapcsolódik az 1. fok vízszintes ellenállásához, eredőjük reciproka *(1 pont)*:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}\,.$$

Ez sorosan kapcsolódik az 1. fok két függőleges ellenállásához, eredőjük *(1 pont)*:

$$R_3 = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}} = \frac{41}{15}R\,.$$

b) A kétfokú létra ellenállása kifejezhető az egyfokúéval *(2 pont)*:

$$R_2 = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{3R}} = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}} = 2R + \frac{RR_1}{R + R_1}.$$

A háromfokú létra ellenállása a kétfokúéval kifejezve *(2 pont)*:

$$R_3 = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}} = 2R + \frac{RR_2}{R + R_2}.$$

Általában az n+1 fokú létra ellenállása az n fokú létráéval kifejezve *(1 pont)*:

$$R_{n+1} = 2R + \frac{RR_n}{R + R_n}.$$

c) Legyen a végtelen fokú létra ellenállása X. Ha ehhez hozzákapcsolunk még egy létrafokot, az ellenállása nem változik (mert a $\infty + 1$ is végtelen), azaz *(3 pont)*:

$$X = 2R + \frac{RX}{R + X}, \qquad RX + X^2 = 2R^2 + 2RX + RX, \qquad X^2 - 2RX - 2R^2 = 0.$$

A másodfokú egyenlet fizikailag értelmezhető gyöke *(2 pont)*:

$$X_{1,2} = \frac{1}{2}\left(2R \pm \sqrt{4R^2 + 8R^2}\right), \qquad X = \left(1 + \sqrt{3}\right)R \approx 2{,}732R.$$