Szakács Jenő Megyei Fizikaverseny

2017/2018. tanév

I. forduló

Megoldások

2017. december 4.

1. A nyomás angolszász mértékegysége a psi (pound-force/square-inch, azaz magyarul font/négyzet-hüvelyk). 20 bar nyomás hány psi nyomásnak felel meg? 1 pound-force (font) = 4,4482 N, illetve 1 m=39,37 inch (hüvelyk). ***(10 pont)***

Megoldás:

$$20\text{bar} = 20\cdot 10^5\,\text{Pa}\ \textcolor{red}{(1\ pont)} = 2\cdot 10^6\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\ \textcolor{red}{(1\ pont)} =$$

$$= 2\cdot 10^6\,\frac{\left(\frac{1}{4,4482}\text{pound}\right)\textcolor{red}{(2\ pont)}}{(39,37\ \text{inch})^2\ \textcolor{red}{(4\ pont)}} = 290\ \text{psi}\ \textcolor{red}{(2\ pont)}$$

(Megjegyzés: a képen látható nyomásmérő műszeren a külső fekete színű skála bar egységben, a belső piros színű skála psi egységben mutatja a nyomást és elég jól leolvasható, hogy 20 bar nyomáshoz kb. 290 psi érték tartozik.)

2. A **B** oázis 38 km-re keletre található a Szaharában az **A** oázistól. Egy állandó 5 km/h sebességgel haladó tevén utazó ember az **A** oázisból indulva előbb 6 órát megy a keleti iránnyal 30°-ot dél felé bezáró irányban, majd miután rájön, hogy eltért a keleti iránytól 4 órát halad északra szintén 5 km/h sebességgel, amikor is egy homokdomb tetejére érve megpihen és szétnéz. Meglátja-e a **B** oázist, ha az aktuális látásviszonyok között maximálisan 15 km távolságra lát el? (Segítség: egy derékszögű háromszög 30°-os szögével szemközti befogó hossza éppen fele az átfogó hosszának.) ***(10 pont)***

Megoldás:

A síkbeli mozgás leírásához válasszuk (szokásosan) a Descartes-féle koordinátarendszerünk *x* tengelyét nyugatról keleti irányba mutatónak, az *y* tengelyét pedig délről észak felé mutatónak, az origót pedig helyezzük az **A** oázisba, a tengelyeket skálázzuk kilométer egységben, így az **A** oázis koordinátái (0;0), míg a **B** oázisé (38;0). *(A koordinátarendszer felvételéért 1 pont)*

Az utazónak az első mozgásszakasza során az elmozdulása $5\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot 6\text{h}=30\ \text{km}$, így a Segítségben megfogalmazott információ szerint az *y* irányú elmozdulása 15 km dél felé $\left(30\ \text{km}\cdot\sin(-30°) = -15\ \text{km}\right)$, míg az *x* irányú elmozdulás a Pitagorasz-tétel alapján $\sqrt{30^2-15^2} = 25,98\ \text{km}\ \left(30\ \text{km}\cdot\cos 30° = 25,98\ \text{km}\right)$. Tehát a (0;0) pontból a (25,98;-15) koordinátájú **C** pontba jut *(3 pont)*. A második mozgásszakaszban észak felé (tehát *y* irányba) mozdul el $5\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot 4\text{h}=20\ \text{km}$ távolságot, így a (25,98;5) koordinátájú **D** pontba jut *(3 pont)*. A **D** és **B** pont közötti távolság a Pitagorasz tétel szerint:

$\overline{DB} = \sqrt{(38-25{,}98)^2 + (0-5)^2} = 13\ \text{km}$ *(2 pont)*, tehát a feladatban megfogalmazott látásviszonyok között az utazó megláthatja a **D** pontbeli homokdombról a **B** oázist *(1 pont)*.

3. Egy lefelé haladó mozgólépcsőn, a lépcsőhöz viszonyított állandó sebességgel megy egy utas lefelé, és így egy perc alatt ér le a mozgólépcsőn. Ha a lépcsőhöz viszonyított sebességét megduplázná, akkor 45 másodperc alatt érne le. Mennyi idő alatt ér le az az ember, aki a mozgólépcsőn áll? ***(20 pont)***

Megoldás:

Jelöljük s-sel a mozgólépcső hosszát és *v*-vel a mozgólépcső sebességét!

1. eset:

Az utas v_u relatív sebességgel mozog a mozgólépcsőhöz képest, így az utas sebessége a Földhöz képest $v_1 = v + v_u$.

$\Delta t_1 = 60\text{s}$ alatt megtett útja: $s = (v + v_u)\cdot \Delta t_1$, melyből (1): $v = \frac{s}{\Delta t_1} - v_u$. *(5 pont)*

2. eset:

Az utas $2v_u$ relatív sebességgel mozog a mozgólépcsőhöz képest, így az utas sebessége a Földhöz képest $v_2 = v + 2v_u$.

$\Delta t_2 = 45\text{s}$ alatt megtett útja (2): $s = (v + 2v_u)\cdot \Delta t_2$. *(5 pont)*

3. eset:

(1)-ből és (2)-ből: $v_u = \frac{s}{\Delta t_2} - \frac{s}{\Delta t_1}$

$$\underline{\underline{\Delta t}} = \frac{s}{v} = \frac{s}{\frac{s}{\Delta t_1} - v_u} = \frac{s}{\frac{s}{\Delta t_1} - \left(\frac{s}{\Delta t_2} - \frac{s}{\Delta t_1}\right)} = \frac{1}{\frac{2}{\Delta t_1} - \frac{1}{\Delta t_2}} = \frac{1}{\frac{2}{60\text{s}} - \frac{1}{45\text{s}}} = \underline{\underline{90\text{s}}}$$ *(10 pont)*

4. Egy sokemeletes panelépületen minden emelet magassága 2,8 méter, amiből az ablakok magassága 1,2 méter. Valamelyik 5. emeleti lakás ablaka előtt egy (függőlegesen) zuhanó virágcserép 0,12 s alatt halad el. Vajon hányadik emeleti lakás ablakpárkányáról eshetett ki a virágcserép? ***(20 pont)***

Megoldás:

A koordinátarendszerünk *y* tengelye mutasson a virágcserép mozgásának irányába, azaz függőlegesen lefelé. Első lépésben használjuk fel azt az információt, hogy tudjuk mennyi idő alatt halad el a cserép az 5. emeleti ablak előtt. Legyen v_0 a cserép sebessége az 5. emeleti ablak felső részénél, ekkor az ablak magasságának megfelelő $\Delta y = h_a = 1{,}2$ m elmozdulásra:

$\Delta y = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2$, amiből $v_0 = \frac{\Delta y - \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2}{\Delta t} = \frac{1,2 - \frac{1}{2} 10 \cdot 0,12^2}{0,12} = 9,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. *(8 pont)*

Második lépésben számítsuk ki, hogy egy nyugalmi helyzetből induló, szabadon eső cserép mennyi idő alatt tesz szert 9,4 m/s sebességre:

$v_0 = g \cdot t$, amiből $t = \frac{v_0}{g} = \frac{9,4}{10} = 0,94\ \text{s}$. *(4 pont)*

Harmadik lépésként határozzuk meg, hogy *t* idő alatt mekkora utat tett meg a szabadon eső (nulla kezdeti sebességű) cserép:

$y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 0,94^2 = 4,418\ \text{m}$. *(4 pont)*

A virágcserép indulási helye valamelyik ablak párkánya, azaz alja, amihez képest tehát az 5. emeleti ablak teteje 4,418 m-re van, az 5. emeleti ablak alja pedig nyilván 4,418+1,2=5,618 m távolságra. Tehát a két ablak aljának (párkányának) távolsága 5,618 m, ami jó közelítéssel kétszerese az emeletek 2,8 méteres magasságának, így kijelenthetjük, hogy a virágcserép a 7. emeleti ablak párkányáról esett ki. *(4 pont)*

5. Éva egy mazsorett csoport tagja, aki elhívta a csoport egyik fellépésére két osztálytársát Andrást és Zsuzsát. A fellépés egyik központi elemének részeként Éva igen magasra hajította fel 70 centiméter hosszú mazsorett botját, melynek kapcsán a következő megfigyelést tették osztálytársai:

- András azt figyelte meg, hogy a bot 3,5 másodpercet töltött a levegőben.
- Zsuzsa azt számolta meg, hogy a bot pontosan 7 teljes fordulatot tett meg a levegőben míg visszakerült Éva kezébe.

Éva a botot a középpontjánál fogva dobta fel és kapta el. Feltéve, hogy Éva kinyújtott karral, ugyanazon a helyen állt, amikor a vízszintes helyzetű bot elhagyta a kezét, illetve amikor a bot visszaérkezett a kezébe, jellemezzük a bot végpontjainak sebességeit,

(a) amikor a bot középpontja a pályája legfelső pontjában volt! ***(10 pont)***
(b) amikor a bot visszaérkezett Éva kezébe! ***(10 pont)***

Megoldás:

$\text{d} = 70\text{cm} = 0{,}7\text{m}$

$\text{r} = 0{,}35\text{m}$

$\Delta\text{t} = 3{,}5\text{s}$

$\text{N} = 7$

Számoljuk ki a mazsorett bot végpontjainak kerületi sebességét a bot tömegközéppontjához rögzített vonatkoztatási rendszerben!

$v_k = \omega \cdot r = 2\pi \cdot f \cdot r = 2\pi \cdot \frac{N}{\Delta t} r = 2\pi \cdot \frac{7}{3{,}5\text{s}} 0{,}35\text{m} = 4{,}4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

(a) A bot végpontjainak sebessége a pálya legfelső pontjában:
A bot pályája legfelső pontjába érkezve éppen a „három és feledik fordulatát” fejezi be, vagyis vízszintes helyzetű lesz, és tömegközéppontjának sebessége éppen nulla. Emiatt a bot két végpontjának sebessége egyforma nagyságú lesz, és irányuk függőleges: egyik felfelé, másik lefelé mutat.

$$\underline{\underline{v_{f_1}}} = v_k = \underline{\underline{4{,}4\frac{m}{s}}}$$ *(3 pont)*

$$\underline{\underline{v_{f2}}} = v_k = \underline{\underline{4{,}4\frac{m}{s}}}$$ *(3 pont)*

Az egyik sebességvektor <u>függőlegesen lefelé</u> *(2 pont)*, a másik <u>függőlegesen felfelé</u> *(2 pont)* mutat.

(b) A bot végpontjainak sebessége a visszatérés pillanatában:
A bot ekkor éppen befejezi a hetedik fordulatát, így ismét vízszintes helyzetű lesz, azonban a bot tömegközéppontjának sebessége (legalábbis annak nagysága) éppen meg fog egyezni azzal a sebességgel, mellyel erről a pontról elindul eldobáskor, de iránya függőlegesen lefelé fog mutatni.

Az emelkedés időtartama: $\Delta t_{EM} = \frac{\Delta t}{2} = 1{,}75\,s$

A tömegközéppont sebessége: $v_{TKP} = g \cdot \Delta t_{EM} = 10\frac{m}{s^2} \cdot 1{,}75\,s = 17{,}5\frac{m}{s}$

Így a végpontok sebességeinek nagyságai és irányai:

$$\underline{\underline{v_{l_1}}} = v_{TKP} + v_k = 17{,}5\frac{m}{s} + 4{,}4\frac{m}{s} = \underline{\underline{21{,}9\frac{m}{s}}}$$ *(3 pont)*

$$\underline{\underline{v_{l_2}}} = v_{TKP} - v_k = 17{,}5\frac{m}{s} - 4{,}4\frac{m}{s} = \underline{\underline{13{,}1\frac{m}{s}}}$$ *(3 pont)*

Mindkét sebességvektor <u>függőlegesen lefelé</u> *(2 x 2 pont)* mutat.

6. Egy karate-mester téglát tör szét puszta kezének ütésével. Mekkora erő hat a kezére, ha 13 m/s sebességgel csap le a téglára, és azon 5 ms alatt fékeződik le (0 m/s sebességre)? A törés során mozgó alkart 3 kg tömegűnek tekinthetjük. ***(10 pont)***

<u>Megoldás:</u>

Az alkar gyorsulása a sebességváltozásából és a lefékeződési időből:

$$|a| = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{13}{5 \cdot 10^{-3}} = 2600\frac{m}{s^2}$$ *(6 pont)*

Newton II. axiómája szerint az m = 3 kg tömegű alkarra ható F erő:
$F = m \cdot a = 3 \cdot 2600 = 7800$ N. *(4 pont)*

Tehát a karate-mester kezére ható erő nagysága 7800 N.

7. Betonból henger alakú tornyot szeretnénk építeni. A mérnökök próbatestet készítettek a rendelkezésünkre álló betonból, és szilárdságtani mérések során megállapították, hogy az építkezéshez felhasználható beton nyomószilárdsága 20 MPa és sűrűsége $2100\frac{kg}{m^3}$.

Mekkora az a legmagasabb torony, amit ebből a betonból építhetünk, ha a tornyot úgy szeretnénk megépíteni, hogy a nyomóterhelés sehol ne haladja meg a nyomószilárdság 40 százalékát? ***(10 pont)***

Megoldás:

$$p_{NY\max} = 20MPa$$

$$\rho = 2100\frac{kg}{m^3}$$

A maximális nyomás a torony alapjánál lesz, melyet a torony súlya okoz:

$$p = \frac{G}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho \cdot V \cdot g}{A} = \frac{\rho \cdot A \cdot h \cdot g}{A} = \rho \cdot g \cdot h$$

$$\underline{\underline{h_{\max}}} = \frac{p_{\max}}{\rho \cdot g} = \frac{p_{NY\max} \cdot 0,4}{\rho \cdot g} = \frac{20 \cdot 10^6 Pa \cdot 0,4}{2100\frac{kg}{m^3} \cdot 10\frac{m}{s^2}} = \underline{\underline{380,95\ m}}$$ *(10 pont)*

8. Egy mozdonyból és a rá kapcsolt 12 darab tehervagonból álló szerelvény halad állandó $90\frac{km}{h}$ sebességgel a nyílt pályán. A szerelvény utolsó két vagonja váratlanul lekapcsolódik, amit a mozdonyvezető nem érzékel (és az automata fékrendszer sem aktivizálódik). Tegyük fel, hogy a mozdony által kifejtett vontatóerő nem változik, a vagonok azonos tömegűek, valamint a mozdony tömege négy tehervagon tömegével egyenlő. A közegellenállás hatását ne vegyük figyelembe, a gördülési súrlódási együttható 0,01.

Amikor a levált két tehervagon éppen megáll, akkor
- mekkora lesz a mozdony sebessége?
- mekkora lesz a két szerelvényrész közötti távolság? ***(20 pont)***

Megoldás:

$$v_0 = 90\frac{km}{h} = 25\frac{m}{s}$$

$$\mu = 0,01$$

Az elszakadás előtt:

A szerelvény egyenletes mozgást végez, ezért a mozgásegyenlete:

$F_H - F_S = 0$

$F_H = F_S = \mu \cdot F_{NY} = \mu \cdot 16 \cdot mg$

Az elszakadás után:

A mozdonnyal rendelkező rész mozgásegyenlete: $F_H - F_{S1} = (10+4)m \cdot a_1$, melyből:

$$a_1 = \frac{F_H - F_{S1}}{14m} = \frac{16\mu mg - 14\mu mg}{14m} = \frac{1}{7}\mu g = \frac{1}{7} \cdot 0{,}01 \cdot 10 \frac{m}{s^2} = \frac{1}{70}\frac{m}{s^2}$$ *(4 pont)*

A leszakadt rész mozgásegyenlete: $-F_{S1} = 2m \cdot a_2$, melyből:

$$a_2 = \frac{-2\mu mg}{2m} = -\mu g = -0{,}01 \cdot 10 \frac{m}{s^2} = -0{,}1\frac{m}{s^2}$$ *(3 pont)*

A leszakadt rész megállásához szükséges idő:

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a_2} = \frac{0 - v_0}{a_2} = \frac{-25\frac{m}{s}}{-0{,}1\frac{m}{s^2}} = 250s$$ *(2 pont)*

A mozdony sebessége, amikor a leszakadt rész megáll:

$$\underline{\underline{v_1}} = v_0 + a_1 \cdot \Delta t = 25\frac{m}{s} + \frac{1}{70}\frac{m}{s^2} \cdot 250s = \underline{\underline{28{,}57\frac{m}{s}}}$$ *(3 pont)*

A leszakadt rész megállásáig megtett utak:

$$s_1 = v_0 \cdot \Delta t + \frac{a_1}{2}\Delta t^2 = 25\frac{m}{s} \cdot 250s + \frac{\frac{1}{70}\frac{m}{s^2}}{2} \cdot (250s)^2 = 6696{,}4m$$ *(3 pont)*

$$s_2 = v_0 \cdot \Delta t + \frac{a_2}{2}\Delta t^2 = 25\frac{m}{s} \cdot 250s + \frac{-0{,}1\frac{m}{s^2}}{2} \cdot (250s)^2 = 3125m$$ *(3 pont)*

A leszakadt rész megállásakor a szerelvényrészek távolsága:

$\underline{\underline{d}} = s_1 - s_2 = 6696{,}4m - 3125m = \underline{\underline{3571{,}4m}}$ *(2 pont)*

9. Egy 70 kg-os műugró lelép a 10 m magasan levő ugródeszkáról és szabadon esik a vízbe. A felszín alatt 5 m-rel állítja meg a víz ellenállása. Számítsa ki a műugróra a víz által kifejtett átlagos ellenállási erőt! ***(10 pont)***

Megoldás:

A műugró mozgására legcélszerűbb a munkatételt alkalmazni a deszkáról való lelépés és a vízben való megállás pillanata között, azaz abból indulhatunk ki, hogy a mozgási energia megváltozása a testre ható erők összmunkájával egyenlő: $\Delta E_{mozg} = W_{össz}$ *(2 pont).*

A testre a mozgás folyamán végig (a 10 méteres magasságtól az 5 méteres mélységig) hat a gravitációs erő, a medencébe érvén pedig a közegellenállási erő (a vízszinttől az 5 méteres mélységig). *(2 pont)*

A mozgásnak mind a kezdetén, mind a végén 0 a sebesség, ill. a mozgási energia, ezért nincs mozgásienergia-változás *(2 pont)*, a munkáknál pedig figyelembe kell vennünk, hogy a gravitációs erő iránya egybeesik az elmozdulás irányával, tehát a gravitáció munkája pozitív, a közegellenállási erő iránya azonban ellentétes az elmozdulással, így munkája negatív *(2 pont)*: $0 = W_{\text{grav}} + W_{\text{közeg}} = G\cdot(10\text{ m} + 5\text{ m}) - F_{\text{közeg}}\cdot 5\text{ m} = 700\text{ N}\cdot(10\text{ m} + 5\text{ m}) - F_{\text{közeg}}\cdot 5\text{ m}$

Az egyenlet megoldása: $F_{\text{közeg}} = \dfrac{700\text{ N}\cdot(10\text{ m}+5\text{ m})}{5\text{ m}} = \underline{\underline{2100\text{ N}}}$ *(2 pont)*

10. Mekkora távolságra tudná egymást megközelíteni két elektron, ha igen nagy távolságból indulnának egymással szemben, azonos, $1500\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú sebességgel? Mekkora lenne maximális gyorsulásuk? ***(10 pont)***

Megoldás:

$\text{v} = 1500\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

$\text{m}_\text{e} = 9{,}1\cdot 10^{-31}\text{kg}$

$\text{e} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\text{C}$

Azonos tömegük miatt a közöttük lévő taszító jellegű kölcsönhatás során azonos ütemben válik a sebességük nullára. Ekkor lesznek legközelebb egymáshoz, és ekkor lesz gyorsulásuk is a legnagyobb.

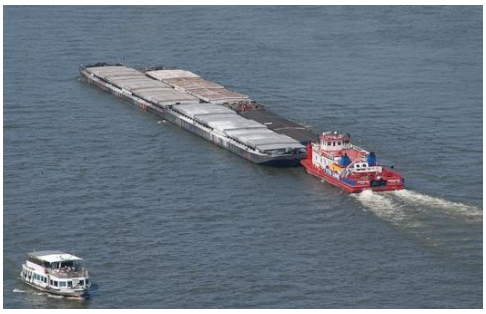
Az energiamegmaradás törvényéből:

$$\frac{1}{2}\text{m}_\text{e}\cdot\text{v}^2 + \frac{1}{2}\text{m}_\text{e}\cdot\text{v}^2 = \text{k}\frac{\text{e}\cdot\text{e}}{\text{d}}$$

$$\underline{\underline{d}} = k\frac{e^2}{m_e\cdot v^2} = 9\cdot 10^9\frac{Nm^2}{C^2}\frac{\left(1{,}6\cdot 10^{-19}C\right)^2}{9{,}1\cdot 10^{-31}kg\cdot\left(1500\frac{m}{s}\right)^2} = \underline{\underline{1{,}13\cdot 10^{-4}m}} \quad \textit{(6 pont)}$$

$$\underline{\underline{a}} = \frac{F}{m_e} = \frac{k\frac{e^2}{d^2}}{m_e} = \frac{k\cdot e^2}{m_e\cdot d^2} = \frac{9\cdot 10^9\frac{Nm^2}{C^2}\left(1{,}6\cdot 10^{-19}C\right)^2}{9{,}1\cdot 10^{-31}kg\cdot\left(1{,}13\cdot 10^{-4}m\right)^2} = \underline{\underline{1{,}983\cdot 10^{10}\frac{m}{s^2}}} \quad \textit{(4 pont)}$$

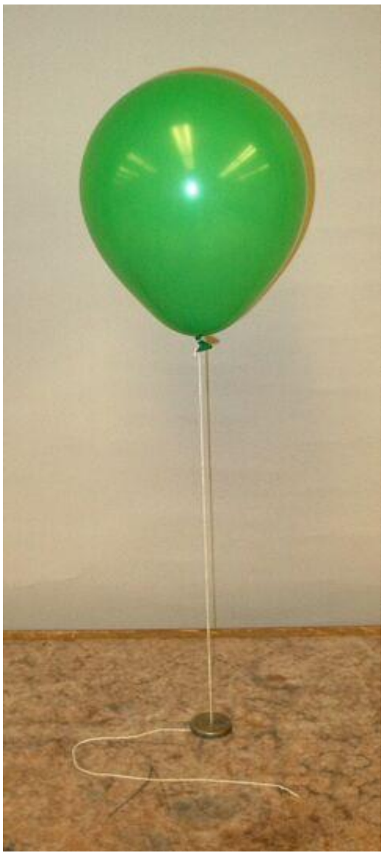
11. Egy uszály éppen kifelé halad a Duna-deltán a Fekete-tengerre. Az uszály vízkiszorítása a Dunán 2540 m^3. Mekkora a változatlan tömegű uszály vízkiszorítása a Fekete-tengeren? A folyóvíz sűrűsége 998 kg/m^3, a tengervízé 1016 kg/m^3. ***(10 pont)***



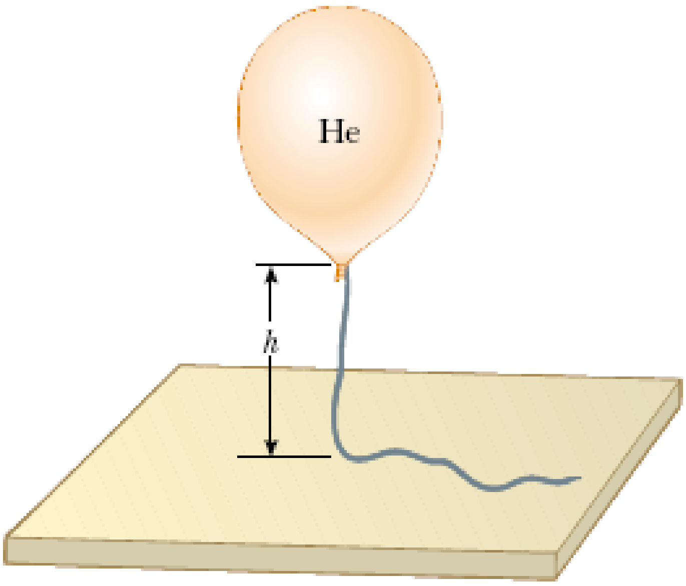
Megoldás:

Legyen az uszály tömege *M*, amely akkor úszik a vízen, ha a rá ható erők eredője nulla:
$\sum F = M \cdot g - F_{fel} = 0$,
amiből:
$M \cdot g = V^* \cdot \rho \cdot g$, *(4 pont)*
ahol ρ a víz sűrűsége, *V** pedig a kiszorított víztérfogat (az uszály víz alatt levő térfogatrésze).

Ez az egyenlet a Dunán és a Fekete-tengeren is igaz:
$M \cdot g = V_D^* \cdot \rho_D \cdot g$, illetve $M \cdot g = V_{Ft}^* \cdot \rho_{Ft} \cdot g$, *(2 pont)*
ahol $\rho_D = 998 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ a Duna sűrűsége, $\rho_{Ft} = 1016 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ a Fekete-tenger sűrűsége, V_D^* és V_{Ft}^* pedig a kiszorított víztérfogatok. Mivel a fenti két egyenlet bal oldala azonos, így a jobb oldalaknak is egyenlőnek kell lenniük:
$V_D^* \cdot \rho_D \cdot g = V_{Ft}^* \cdot \rho_{Ft} \cdot g$, *(2 pont)*
amiből:
$V_{Ft}^* = V_D^* \cdot \frac{\rho_D}{\rho_{Ft}} = 2540 \cdot \frac{998}{1016} = 2495 \text{ m}^3$. *(2 pont)*
Tehát az uszály vízkiszorítása 2495 m^3 lesz a Fekete-tengeren.



12. Egy héliummal töltött gömb alakú ballon sugara 40 cm, és egy 2 m hosszú, 5 dkg tömegű zsinórral van megkötve. Amikor elengedjük, úgy lebeg, hogy a zsinór egy *h* hosszú részét is megtartja. Határozza meg *h*-t! A léggömb anyaga 0,25 kg tömegű, a levegő sűrűsége 1,21 kg/m^3, a héliumé 0,166 kg/m^3. ***(20 pont)***



Megoldás:

A léggömb és zsinórja azért lebeg, mert a rá ható felhajtóerő megegyezik az összsúllyal: $F_{\text{felh}} - G = 0$ *(2 pont)*. A felhajtóerő a kiszorított levegő súlyával egyenlő, ami a levegő sűrűségéből és a léggömb *V* térfogatából adódik *(3 pont)*, az összsúlyban pedig a hélium súlya (szintén sűrűségből és térfogatból, *(3 pont)*, a ballon m_b tömegének *g*-szerese *(2 pont)* és a zsinór megtartott tömegének *g*-szerese szerepel *(2 pont)*, mely utóbbi úgy aránylik a zsinór m_{zs} össztömegéhez, mint *h* a zsinór teljes ℓ hosszához *(4 pont)*:

$$\rho_{\text{lev}} \cdot V \cdot g - \left(\rho_{\text{He}} \cdot V \cdot g + m_b \cdot g + m_{zs} \cdot \frac{h}{\ell} \cdot g \right) = 0$$

Ez egyismeretlenes elsőfokú egyenlet *h*-ra, melynek megoldása (ha még figyelembe vesszük, hogy az *r* sugarú gömb alakú léggömb térfogata $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$, *(2 pont)*:

$$h = \ell \cdot \frac{(\rho_{\text{lev}} - \rho_{\text{He}})V - m_b}{m_{zs}} = 2\ \text{m} \cdot \frac{(1{,}21 - 0{,}166)\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{4}{3}(0{,}4\ \text{m})^3 \pi - 0{,}25\ \text{kg}}{0{,}05\ \text{kg}} = \underline{\underline{1{,}20\ \text{m}}}$$ *(2 pont)*.

13. Egy 20 cm² keresztmetszetű hengerben 7,2 kg tömegű jól tömített, súrlódásmentes dugattyú zár el egy 33 cm magas, 0 °C hőmérsékletű levegőoszlopot. A dugattyú felső pereme fölött még 7 cm magasságig folytatódik a henger. A légköri nyomás 100 kPa. A dugattyú fölötti részbe lassan higanyt öntünk, amíg már nem fér több a hengerbe. Milyen tömegű higanyt használtunk fel? A levegő hőmérséklete a kísérlet közben nem változik, a higany sűrűsége 13,6 g/cm³. ***(20 pont)***

Megoldás:

Jelöljük a folyamat kezdetéhez tartozó mennyiségeket vessző nélküli, a végéhez tartozókat vesszős betűkkel!
A dugattyú alatti (kezdetben *h* = 33 cm magas) és afölötti (kezdetben *x* = 7 cm magas) rész magasságának összege az egész folyamatban állandó: $x + h = x' + h'$ *(2 pont)*.

A dugattyú alatt állandó hőmérsékletű (izotermikus) állapotváltozás megy végbe, melyre érvényes a Boyle–Mariotte-törvény: $p \cdot V = p' \cdot V'$, ami a henger *A* keresztmetszetét és a magasságokat figyelembevéve $p \cdot A \cdot h = p' \cdot A \cdot h'$ -ként írható *(2 pont)*.

A dugattyú alatt akkora a nyomás, hogy meg tudja tartani a légnyomás nyomóerejét, az *M* tömegű dugattyú súlyát, és végül az m_{Hg} tömegű higany súlyát is: $p \cdot A = p_{\text{légkör}} \cdot A + M \cdot g$ (kezdetben, *3 pont*), $p' \cdot A = p_{\text{légkör}} \cdot A + M \cdot g + m_{Hg} \cdot g$ (a végén, *3 pont*). A higany tömege a térfogatával és a sűrűségével is írható: $m_{Hg} = \rho_{Hg} \cdot x' \cdot A$ *(2 pont)*, és ennek használata a végállapot egyensúlyának egyenletében sokat egyszerűsít a feladat megoldásán:

$$p' \cdot A = p_{\text{légkör}} \cdot A + M \cdot g + \rho_{Hg} \cdot x' \cdot A \cdot g.$$

Az utóbbi két egyenlet bal oldalai szerepelnek a Boyle–Mariotte-törvényben. Cseréljük ki a törvényben a bal oldalakat a jobb oldalakra:
$\left(p_{\text{légkör}} \cdot A + M \cdot g\right) h = \left(p_{\text{légkör}} \cdot A + M \cdot g + \rho_{\text{Hg}} \cdot x' \cdot A \cdot g\right) h'$ *(3 pont).*

Használjuk ki a dugattyú alatti és fölötti részek összmagasságának állandóságát:
$\left(p_{\text{légkör}} \cdot A + M \cdot g\right) h = \left(M \cdot g + \rho_{\text{Hg}} \cdot x' \cdot A \cdot g\right)\left(x + h - x'\right)$ *(2 pont).*
Ez egyismeretlenes egyenlet x'-re. Behelyettesítve az ismert mennyiségeket (SI-alapmértékegységben) a következő másodfokú számértékegyenlet adódik:
$\left(10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-4} + 7{,}2 \cdot 10\right) 0{,}33 = \left(10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-4} + 7{,}2 \cdot 10 + 13600 \cdot x' \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 10\right)\left(0{,}33 + 0{,}07 - x'\right)$,
elvégezve a műveleteket $89{,}76 = \left(272 + 272 \cdot x'\right)\left(0{,}4 - x'\right)$, aminek két megoldása közül a fizikailag értelmes: $x' = 0{,}1\ \text{m}$ *(2 pont)* és ebből $m_{\text{Hg}} =$ $\underline{\underline{2{,}72\ \text{kg}}}$ *(1 pont)*

14. Egy injekciós fecskendő csövéhez nyomásmérőt kötöttünk, ami a dugattyúval elzárt térben uralkodó nyomást mutatja. A dugattyú kezdetben a 20 cm^3-es beosztásnál áll, belül 100 kPa nyomású levegő, valamint ismeretlen mennyiségű üveggyapot van. A dugattyút lassan a 10 cm^3-es jelzésig nyomjuk, ekkor a bezárt levegő nyomása 220 kPa lesz. Mekkora az üveggyapot tömör térfogata? ***(10 pont)***

Megoldás:

Jelöljük a folyamat kezdetéhez tartozó mennyiségeket 1-es, a végéhez tartozókat 2-es indexszel!
A fecskendőben állandó hőmérsékletű (izotermikus) állapotváltozás megy végbe, melyre érvényes a Boyle-Mariotte-törvény: $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$ *(2 pont)*. A kezdeti nyomás a légköri nyomással azonos *(1 pont),* a végső nyomás ismert. A bezárt gáz térfogata a leolvasott értéknél éppen annyival kisebb, amennyi az üveggyapot *V* tömör térfogata *(3 pont).* Mindezeket behelyettesítve a törvénybe: $100\ \text{kPa} \cdot \left(20\ \text{cm}^3 - V\right) = 220\ \text{kPa} \cdot \left(10\ \text{cm}^3 - V\right)$.
Ennek az egyismeretlenes elsőfokú egyenletnek a megoldása $V = \underline{\underline{1{,}67\ \text{cm}^3}}$ *(4 pont).*

15. Tenger alatti vulkanikus gázforrásból feltörő buborékok térfogata hányszorosára nő, miközben a felszínre érnek? A forrás 60 m mélyen van, a gáz hőmérséklete a forrásnál 85°C, amely a felszínig 25°C-ra hűl le. A légnyomás 1015 hPa, a tengervíz sűrűsége 1016 kg/m^3. ***(20 pont)***

Megoldás:

A buborékokban levő gáz miközben a felszínre jut hőtani szempontból egy állapotváltozási folyamaton megy keresztül, amely során változik a nyomása, a hőmérséklete és a térfogata is. *(4 pont)*

Jelölje 1-es index a gázforrásnál levő állapotot és 2-es index a felszínnél levő állapotot.

A felszínnél: $p_2 = 1015\ \text{hPa} = 1015 \cdot 10^2\ \text{Pa} = 1{,}015 \cdot 10^5\ \text{Pa}$, $T_2 = 25°\text{C} = 298\ \text{K}$, a térfogat V_2. *(3 pont)*

A gázforrásnál a nyomás a légköri nyomás és a hidrosztatikai nyomás összege:

$p_1 = p_0 + \rho_t \cdot g \cdot h = 1{,}015 \cdot 10^5 + 1016 \cdot 10 \cdot 60 = 7{,}111 \cdot 10^5\ \text{Pa}$, *(3 pont)*

a hőmérséklet és a térfogat: $T_1 = 85°\text{C} = 358\ \text{K}$, V_1. *(2 pont)*

Az egyesített gáztörvényből közvetlenül, vagy a két állapotra felírt állapotegyenletből rendezve felírható a két állapot közötti kapcsolat:

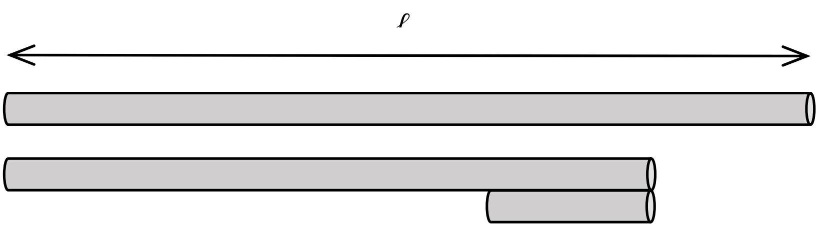
$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$, *(6 pont)*

amiből:

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1 \cdot T_2}{p_2 \cdot T_1} = \frac{7{,}111 \cdot 10^5 \cdot 298}{1{,}015 \cdot 10^5 \cdot 358} = 5{,}83$.*(2 pont)*

Tehát a buborékok térfogata 5,83-szorosára nő miközben a felszínre jutnak.

16. Az ℓ hosszúságú vezetékből levágtak egy darabot és hozzáforrasztották a maradék végéhez úgy, hogy az a rész kétszer akkora keresztmetszetű lett (l. az ábrát). Az így kapott vezeték ellenállása az eredetinek harmadrésze lett. (a) Milyen hosszú darabot vágtak le? (b) Milyen határok között lehet ily módon változtatni az ellenállást? ***(20 pont)***



Megoldás:

Ismert, hogy a vezetők ellenállása egyenesen arányos a hosszúságukkal, fordítottan arányos az *A* keresztmetszetükkel, és az arányossági tényező az anyagi minőségtől függő ρ fajlagos ellenállás. Ezekkel a vezeték eredeti ellenállása $R = \rho \cdot \frac{\ell}{A}$ *(2 pont)*.

(a) Jelöljük a levágott és visszaforrasztott darab hosszát *x*-szel! Az a rész, ami mellé nem forrasztottunk semmit $\ell - 2x$ hosszúságú *(3 pont)*.

A lerajzolt elrendezés két sorba kapcsolt vezetékdarabként fogható fel, melyek közül az első hossza $\ell - 2x$ és keresztmetszete megegyezik az eredeti vezeték A keresztmetszetével, a második x hosszúságú és $2A$ keresztmetszetű. Ezek ellenállásának összege az új ellenállás $R' = \rho \cdot \frac{\ell - 2x}{A} + \rho \cdot \frac{x}{2A}$ *(3 pont).* Ez — mint megadták — az eredeti érték harmada: $\frac{R}{3} = \frac{1}{3} \rho \cdot \frac{\ell}{A} = \rho \cdot \frac{\ell - 2x}{A} + \rho \cdot \frac{x}{2A}$. Az utóbbi egyenlőség megoldható x-re, még a ρ és az A értéke sem szükséges, mert azok kiesnek. $\underline{\underline{x = \frac{4}{9} \cdot \ell}}$ *(2 pont).*

(b) Láttuk, hogy az új ellenállás a levágott x résztől lineárisan függ, és a növekvő x-szel csökken *(2 pont).* A kérdés már csak az, hogy mi a minimális ellenállás (ami a maximális levágott részhez tartozik). A levágott és visszaforrasztott darab hossza legfeljebb a teljes hossz fele lehet *(3 pont).* Ezt behelyettesítve x-ként az új ellenállás képletébe:

$R'' = \rho \cdot \frac{\ell - 2 \cdot \frac{\ell}{2}}{A} + \rho \cdot \frac{\frac{\ell}{2}}{2A} = \frac{R}{4}$ *(2 pont).* Azaz a rajzolt módon a vezeték ellenállása az eredeti ellenállás és annak negyede között változtatható *(3 pont).*