Szakács Jenő Megyei Fizikaverseny

Megoldások

2013/2014. tanév

I. forduló

2013. december 2.

1. Egy személy 135 másodperc alatt megy fel gyalog egy kikapcsolt mozgólépcsőn. Ha rááll a működő mozgólépcsőre, az 90 másodperc alatt viszi fel. Mennyi időbe telik az embernek felgyalogolni a bekapcsolt mozgólépcsőn? ***(10 pont)***

Megoldás:
Jelölje L a mozgólépcső hosszát, v_{gy} a gyaloglás sebességét és v_l a mozgólépcső haladási sebességét, ekkor:
$L = v_{gy} \cdot 135s$, illetve $L = v_l \cdot 90s$,
amelyekből:
$v_{gy} = \dfrac{L}{135s}$, illetve $v_l = \dfrac{L}{90s}$.
A bekapcsolt mozgólépcsőn gyalogolva az eredő sebesség $v_{gy} + v_l$, így az L hosszúságú út megtételéhez szükséges idő:

$$t = \frac{L}{\left(v_{gy} + v_l\right)} = \frac{L}{\left(\dfrac{L}{135s} + \dfrac{L}{90s}\right)} = \frac{135s \cdot 90s}{135s + 90s} = 54s .$$

Tehát 54 másodpercbe telik az embernek felgyalogolni a bekapcsolt mozgólépcsőn. *10 pont*

2. A pesti szleng a villamost többek között a „tuja” névvel illette, amely még abból az időből ered, amikor a villamosoknak nyitott lépcsője volt (azaz a lépcső az ajtón kívül volt). Így akár még a mozgó villamosra is fel lehetett ugrani, ezért sokak számára a villamos „há*tulja*” volt a kiszemelt célpont. Nos, tekintsünk egy ilyen szituációt! Egy villamos a megállóból éppen akkor indul el 1,2 m/s^2 gyorsulással, amikor egy ember 6 méter távolságban van a végén levő lépcsőtől (a villamos mögötti irányban). Az ember 4 m/s sebességű egyenletes futással üldözőbe veszi a villamost (a sínszakasz egyenes). Fel tud-e ugrani a lépcsőre, azaz utoléri-e az ember a villamos végét, és ha igen mennyit kell futnia? Magyarázzuk el szemléletesen a kapott eredményeket! ***(30 pont)***

Megoldás:
Koordináta-rendszerünk x tengelye legyen párhuzamos a sínnel, mutasson a villamos mozgásának irányába és az origó legyen a villamos végénél (hátsó lépcsőjénél) az indulás pillanatában. Ekkor a villamos, illetve az ember x koordinátájának időfüggése:
$x_v\left(t\right) = \dfrac{1}{2} 1,2 \cdot t^2$,
illetve:
$x_e\left(t\right) = -6 + 4 \cdot t$.
Az ember akkor éri utol a villamos lépcsőjét, ha $x_v\left(t\right) = x_e\left(t\right)$, azaz $0,6 \cdot t^2 = -6 + 4 \cdot t$, amely másodfokú egyenletnek két gyöke van: t_1=2,28 s és t_2=4,39 s. *15 pont*

De vajon mindkét megoldásnak van valós fizikai tartalma? Hogy ezt megvilágítsuk, számoljuk ki a villamos sebességét a két kapott időpillanatban:

$v_v\left(t=t_1\right)=1{,}2\frac{m}{s^2}\cdot 2{,}28s=2{,}74\frac{m}{s}$, illetve $v_v\left(t=t_2\right)=1{,}2\frac{m}{s^2}\cdot 4{,}39s=5{,}27\frac{m}{s}$.

Látható, hogy a t_1=2,28 s időpillanatban az ember sebessége (4 m/s) nagyobb, mint a villamosé, azaz ha nem ugrik fel, hanem tovább fut, akkor leelőzi a villamos hátsó lépcsőjét. Azonban a villamos tovább gyorsul és a t_2=4,39 s időpillanatban már a hátsó lépcső éri utol az embert, majd ha az ekkor sem ugrott fel rá, végleg lehagyja. *10 pont*

Természetesen az embernek az első alkalmat kell megragadnia az ugrásra, ha egyáltalán érdemes mozgó járműre felugrani, akkor annak sebessége legyen minél kisebb. Az első esetben $s_1=4\,{}^{m}\!/_{s}\cdot 2{,}28\,s=9{,}12$ métert, a második esetben $s_2=4\,{}^{m}\!/_{s}\cdot 4{,}39\,s=17{,}56$ métert kell futnia. *5 pont*

3. Becsüljük meg, hogy mekkora (hány N) ütés éri a futballjátékos fejét fejeléskor! Az ütközés igen jó közelítéssel tökéletesen rugalmasnak tekinthető, tegyük fel, hogy a labda 22 m/s sebességgel érkezik a fejéhez és ugyanekkora nagyságú (pontosan ellentétes irányú) sebességgel pattan vissza. A labda tömege 450 gramm, az ütközés időtartama (amíg a labda a fejjel érintkezik) kb. 0,01 másodperc. A futballjátékos 90 kg testtömegének mintegy 10%-a a fejének tömege, tehát kb. 9 kg. Egy ember agya maximálisan 30-40 m/s^2 gyorsulást képes elviselni következmények (pl. agyrázkódás, ájulás) nélkül. Vajon miért nem történik semmi baja a játékosnak fejeléskor? (Érdemes alaposan megnézni a képet!) ***(10 pont)***

Megoldás:

A labda sebességváltozásának nagysága 44 m/s (+22 m/s sebességről -22 m/s sebességre változott), így a gyorsulás nagysága:

$$a=\frac{44\,{}^{m}\!/_{s}}{0{,}01\,s}=4400\,\frac{m}{s^2},$$

Amiből a labdára, és ennek ellenerejeként a játékos fejére ható erő nagysága:

$$F=m_{labda}\cdot a=0{,}45\,kg\cdot 4400\,{}^{m}\!/_{s^2}=1980\,N\,.$$

A játékos fejének gyorsulása (ha csak a fej tömegét vennénk figyelembe):

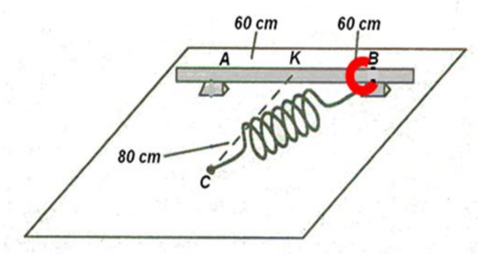
$$a_{fej}=\frac{F}{m_{fej}}=\frac{1980\,N}{9\,kg}=220\,\frac{m}{s^2}\,.$$ *5 pont*

A kapott érték sokszorosan felülmúlja a 30-40 m/s^2 kritikus gyorsulást, amelyet az agy képes elviselni, azaz a fejelő játékosnak legalábbis el kellene ájulnia. Ha azonban a képet jól megnézzük, akkor látható, hogy a játékos nyakizmai teljesen megfeszülnek, így a fej gyakorlatilag tökéletesen mereven csatlakozik a törzshöz, azaz az ütés ereje a teljes testre fog hatni, ez esetben a gyorsulás értéke csupán:

$$a=\frac{F}{m_{test}}=\frac{1980\,N}{90\,kg}=22\,\frac{m}{s^2}\,.$$ *5 pont*

Megjegyezzük, hogy ha a játékos nem készül fel nyakizmai megfeszítésével a labda érkezésére (pl. hátulról találja véletlenül fejbe a labda), akkor csak a fej veszi át az erőlökést és a játékos valóban elájulhat.

4. Egy egyenes, sima rudat vízszintes asztallapon rögzítünk az egymástól 1,2 m távolságban levő A és B pontokban. A rúdra egy 0,5 kg tömegű bilincset húztak, amely súrlódásmentesen csúszhat a rúdon. A bilincshez egy 90 N/m rugóállandójú, elhanyagolható tömegű, 40 cm nyugalmi hosszúságú rugót erősítünk, a rugó másik végét pedig a C pontban rögzítjük. A C pont az A és B pontok felezőmerőlegesén a rúdtól 0,8 m távolságban van. A bilincset a B pontba húzzuk, majd kezdősebesség nélkül elengedjük. Mekkora sebességgel halad át a bilincs a K ponton, az AB szakasz felezőpontján? ***(20 pont)***



Megoldás:

A mechanikai energia megmaradási törvénye szerint a bilincs mozgási energiájának és a rugó helyzeti energiájának összege állandó, tehát a B pontban és a K pontban azonos értékű:

$\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}k\left(l_B-l_0\right)^2=\frac{1}{2}mv_K^2+\frac{1}{2}k\left(l_K-l_0\right)^2$. *10 pont*

A rugó nyugalmi hossza $l_0=0,4\,m$, a rugóállandója $k=90\,N/m$, a bilincs tömege $m=0,5\,kg$. A rugó hossza, amikor a bilincs a B pontban van $l_B=\sqrt{0,6^2+0,8^2}=1\,m$, amikor pedig a K pontban van $l_K=0,8\,m$, így (felhasználva, hogy $v_B=0$):

$$v_K=\sqrt{\frac{k}{m}\left[\left(l_B-l_0\right)^2-\left(l_K-l_0\right)^2\right]}=\sqrt{\frac{90}{0,5}\left[\left(1-0,4\right)^2-\left(0,8-0,4\right)^2\right]}=6\,\frac{m}{s}.$$

A bilincs tehát 6 m/s sebességgel halad át a K ponton. *10 pont*

5. Egy kalapácsvető „tréfából” függőleges síkban forgatja meg a kalapácsát egy 160 cm sugarú (karhossz plusz szár) körön. A kalapácsvető válla 1,7 m magasságban van, azaz a kör középpontja 1,7 m magasan van a föld felett. A felszínhez képest milyen magasra tudja függőlegesen felhajítani a 3 1/s fordulatszámmal forgatott kalapácsot? (g=9,81 m/s^2) ***(20 pont)***

Megoldás:

A kalapács akkor jut a legmagasabbra, ha fölfelé haladása pillanatában engedjük el (tehát 1,7 m magasságban), ekkor függőlegesen elhajítva mozog.

Adatok: n = 3 1/s, r = 1,6 m.

$v_{\text{ker}}=r\cdot\omega=r\cdot 2\pi n$ = 1,6 m·2π·3 1/s = 30,2 m/s = $v_{\text{kezdő}}$ *5 pont*

Az elhajítási helyhez képesti emelkedés h mértéke többféleképpen is kiszámítható:

(a) Az emelkedés addig tart, amíg a test sebessége el nem tűnik:

$$\Delta t=\frac{\Delta v}{a}=\frac{0-v_{\text{kezdő}}}{-g}=\frac{-30,2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{-9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}=3,08\text{ s},$$

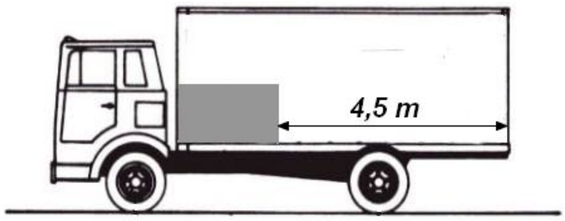
amiből:

$$h=v_{\text{kezdő}}\cdot\Delta t+\frac{a}{2}\cdot\Delta t^2=30,2\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 3,08\,\text{s}+\frac{-9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2}\cdot\left(3,08\,\text{s}\right)^2=46,5\text{ m}$$

(b) $\Delta E_{\text{mozgási}} + \Delta E_{\text{helyzeti}} = -\frac{1}{2} m \cdot v_{\text{kezdő}}^2 + m \cdot g \cdot h = 0 \Rightarrow h = \dfrac{v_{\text{kezdő}}^2}{2g} = 46{,}5 \text{ m}$

Így a felszínhez képest 46,5 m + 1,7 m = 48,2 m magasságig emelkedik a kalapács. 15 pont

6. Egy rendőrlámpánál álló tehergépkocsi 2,5 m/s^2 gyorsulással indul el. A rakodótérben a hátsó faltól 4,5 m távolságra egy 440 kg tömegű láda van, amely az indulás pillanatában megcsúszik. Mennyi idő múlva ütközik a láda a hátsó falnak, ha a csúszási súrlódási együttható a láda és a padló között 0,153? (g=9,81 m/s^2) ***(30 pont)***



Megoldás:

Koordináta-rendszerünk x tengelye mutasson a teherautó mozgásának irányába, az y tengely pedig függőlegesen felfelé, az origót rögzítsük a teherautó helyén az úthoz az indulás pillanatában. A Newton-féle mozgásegyenletek x, illetve y komponensekre:

$F_N - mg = 0$, *illetve* $F_s = ma_l$,

ahol F_N a felületi kényszererő, F_s a csúszási súrlódási erő, m a láda tömege és a_l a láda x irányú gyorsulása (az úthoz képest).

A csúszási súrlódási erő definíció szerint:

$F_s = \mu F_N$,

így a fenti egyenletekből:

$F_s = \mu F_N = \mu mg$,

amiből:

$a_l = \mu g = 0{,}153 \cdot 9{,}81 = 1{,}5\ {}^{m}\!/\!_{s^2}$. 15 pont

Ez a láda gyorsulása az úttesthez képest, viszont a teherautó ugyanebbe az irányban mozog $a_t = 2{,}5\ {}^{m}\!/\!_{s^2}$ gyorsulással, így a sebesség-összeadódás törvénye szerint a láda relatív gyorsulása a teherautóhoz képest (azaz a teherautóhoz rögzített koordináta-rendszerben):

$a = a_l - a_t = 1{,}5\ {}^{m}\!/\!_{s^2} - 2{,}5\ {}^{m}\!/\!_{s^2} = 1\ {}^{m}\!/\!_{s^2}$. 5 pont

A teherautóhoz rögzített koordináta-rendszerben $s = 4{,}5\ m$ utat kell megtennie a ládának a hátsó falig, amelyhez szükséges idő:

$t = \sqrt{\dfrac{2s}{a}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 4{,}5}{1}} = 3\ s$. 10 pont

Tehát a láda az indulás pillanatától számítva 3 másodperc múlva ütközik a rakodótér hátsó falának.

7. Hogy gyámoltalan fiókáikat megvédjék, a vándorsólymok nagy sebességel nekirepülnek a közelítő fészekrabló madaraknak, mint pl. a dolmányos varjaknak. Egy dokumentált esetben a 600 g-os vándorsólyom 20 m/s sebességgel repült neki a 1,5 kg tömegű varjúnak, ami 9 m/s-mal repült. A sólyom a varjú eredeti haladási irányára merőlegesen csapódott be, és 5 m/s sebességgel lökődött vissza saját kezdősebességének irányával pontosan ellentétesen. Mennyivel változott meg a varjú sebességének nagysága? ***(20 pont)***

Megoldás:
Két test ütközéséről van szó, melynek során az összlendület megmaradó mennyiség. A varjú ütközés utáni sebessége ebből meghatározható, és a sebességnagyságának megváltozása is.
Adatok: Legyen a varjú eredeti haladási iránya az *x* irány, a nekirepülő sólyom mozgásiránya az *y* irány (adott, hogy ezek merőlegesek egymásra). **u** betűkkel fogjuk jelölni a kezdősebességeket, és **v**-kkel a végsebességeket. Ezekkel a jelölésekkel $m_s = 600$ g, $m_v = 1{,}5$ kg, $\mathbf{u}_s(0;\ 20\text{ m/s})$; $\mathbf{u}_v(9\text{ m/s};\ 0)$; $\mathbf{v}_s(0;\ -5\text{ m/s})$.

A lendület megmarad: $m_s \cdot \mathbf{u}_s + m_v \cdot \mathbf{u}_v = m_s \cdot \mathbf{v}_s + m_v \cdot \mathbf{v}_v$, amiből $\mathbf{v}_v = \dfrac{m_s \cdot \mathbf{u}_s + m_v \cdot \mathbf{u}_v - m_s \cdot \mathbf{v}_s}{m_v} =$

$= \mathbf{u}_v + \dfrac{m_s}{m_v}(\mathbf{u}_s - \mathbf{v}_s) = \left(9\tfrac{\text{m}}{\text{s}};0\right) + \dfrac{0{,}6\,\text{kg}}{1{,}5\,\text{kg}}\left[\left(0;20\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right) - \left(0;\text{-}5\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right]$ = (9 m/s; 10 m/s). Eszerint a varjú ütközés utáni sebessége nagysága $\text{v}_v = |\mathbf{v}_v| = \sqrt{\left(9\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(10\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}$ = 13,5 m/s, tehát 4,5 m/s-mal változott meg a varjú sebességének nagysága. *20 pont*

8. Egy 12,2 m^3 térfogatú tartályba behelyezünk egy 0,2 m^3 térfogatú (elhanyagolható falvastagságú) dobozt, amelynek tetejét egy 0,5 kg tömegű, 200 cm^2 felületű vízszintes síklemez („ajtó”) zárja le. A dobozban 30 °C hőmérsékletű, 8 mólnyi mennyiségű ideális gáz van, míg a tartályban ugyanilyen, azonos hőmérsékletű 479 mólnyi gáz. Az egész rendszert melegítve milyen *T* hőmérsékleten nyílik ki az ajtó? (g=9,81 m/s^2) ***(30 pont)***

Megoldás:
Először is vegyük észre, hogy a feladatban megfogalmazott elrendezésben a tartály hasznos térfogata (amelyet a benne levő gáz elfoglalhat) $V_t = 12{,}2\ m^3 - 0{,}2\ m^3 = 12\ m^3$. A tartályban levő gáz mennyisége $n_t = 479\ mol$, míg a $V_d = 0{,}2\ m^3$ térfogatú dobozban levő gáz mennyisége $n_d = 8\ mol$. Az ideális gáz állapotegyenlete alapján a tartályban, illetve a dobozban levő gáz nyomásának értéke egy adott *T* hőmérsékleten $p_t = \dfrac{n_t}{V_t} RT$, illetve

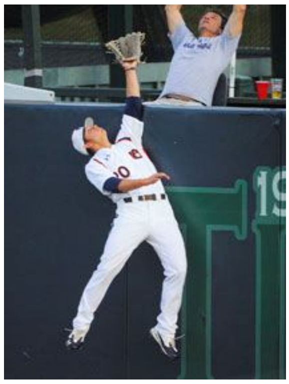
$p_d = \dfrac{n_d}{V_d} RT$. *10 pont*

Az „ajtó” akkor nyílik fel, ha a doboz és a tartály nyomáskülönbségéből származó az $m = 0{,}5\ kg$ tömegű lezáró lemez $A = 0{,}02\ m^2$ felületére ható erő nagyobb lesz, mint a lemez súlya, azaz:
$(p_d - p_t) A \geq mg$. *5 pont*

A fenti nyomáskifejezéseket felhasználva kapjuk, hogy:
$\left(\dfrac{n_d}{V_d} - \dfrac{n_t}{V_t}\right) RTA \geq mg$, *5 pont*
amiből:

$$T \geq \frac{mg}{\left(\frac{n_d}{V_d}-\frac{n_t}{V_t}\right)RA} = \frac{0,5\cdot 9,81}{\left(\frac{8}{0,2}-\frac{479}{12}\right)\cdot 8,314\cdot 0,02} = 354\ K = 81\ °C\ .$$ 10 pont

Tehát a rendszert a kezdeti 30 °C hőmérsékletről 81 °C hőmérséklet fölé kell melegíteni, hogy a lezáró lemez („ajtó”) kinyisson.



9. Egy baseball ütőjátékos 40 m/s sebességgel, a vízszinteshez képest 25°-os emelkedési szög alatt üti el a labdát, a pálya szintje felett 1 m magasságból. El tudja-e kapni a tőle 118 m távolságban levő fogójátékos a felé szálló labdát, ha (felugorva) maximálisan 2,8 m magasságig képes felnyújtani a kezét? (g=9,81 m/s^2) (A pálya vízszintes síkú.) ***(20 pont)***

Megoldás:
Helyezzük a koordináta-rendszerünk origóját az ütőjátékos lábához a talajra, az x tengely mutasson az ütőjátékostól a fogójátékos felé, az y tengely pedig függőleges. Ebben a koordináta-rendszerben a t=0 pillanatban elütött labda helyét egy adott t időpillanatban az alábbi összefüggések adják meg:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos\alpha \cdot t = 0 + 40\cos 25° \cdot t$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2 = 1 + 40\sin 25° \cdot t - \frac{1}{2}9,81\cdot t^2 \ .$$ 10 pont

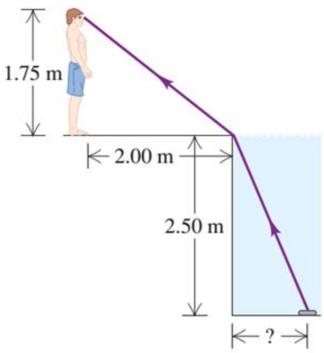
Az első összefüggésből meghatározhatjuk, hogy a labda mennyi idő alatt ér az x=118 m pontba:

$$t = \frac{118}{40\cos 25°} = 3,255\ s\ ,$$ 5 pont

Majd a második összefüggésből kiszámíthatjuk a labda $y(t=3,255\ s)$ magasságát a fogójátékosnál:

$$y(t=3,255\ s) = 1 + 40\sin 25° \cdot 3,255 - \frac{1}{2}9,81\cdot 3,255^2 = 4\ m\ .$$

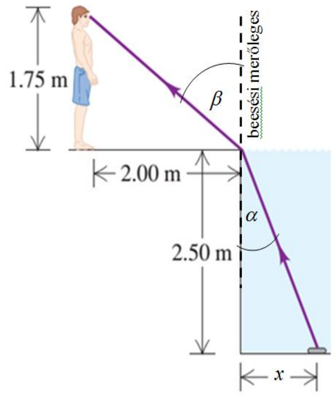
A labda tehát 4 m magasságban repül a fogójátékosnál, így az nem tudja elkapni. 5 pont



10. Napozáshoz készülődve egy medence partján észreveszed, hogy nincs meg a mobiltelefonod. A 2,5 m mélységű medence szélétől 2 m-re állsz és körüljártatod a tekintetedet (szemed a talajszint és az azzal megegyező vízszint fölött 1,75 m-rel van). Röviden észre is veszed a telefont, épp hogy csak látszik a medence alján, a medence széle majdnem eltakarja. Milyen messze van a telefonod a medence falától? ***(20 pont)***

Megoldás:
A telefonról a szembe jutó fény a levegő és a víz határfelületén megtörik. Az adatokból kiszámítható a (levegőbeli) törés szöge, amihez a fénytörés törvényéből meghatározható a (vízbeli) beesés szöge, mely a vízmélységgel együtt megadja a telefonnak a medence aljától mért távolságát, *x*-et.

tg β = 2 m / 1,75 m, innen β = 48,8°; tg $\alpha = x$ / 2,5 m, valamint $n_{levegő}$ = 1 és $n_{víz}$ = 1,33

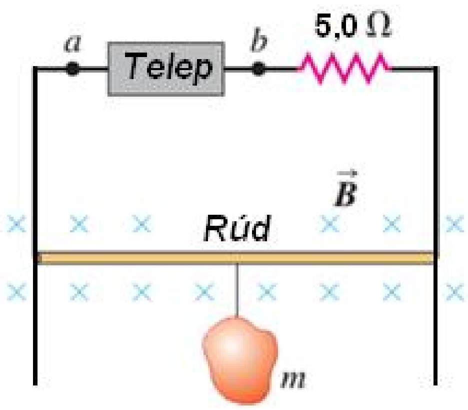


A fénytörés törvénye: $n_{víz} \cdot \sin\alpha = n_{levegő} \cdot \sin\beta$, amiből

$$\sin\alpha = \frac{n_{levegő}}{n_{víz}} \sin\beta = \frac{1}{1{,}33} \sin 48{,}8° = = 0{,}566 \text{ és } \alpha = 34{,}5°.$$

x-et kifejezve x = 2,5 m·tg 34,5° = 1,72 m. 20 pont

11. Az ábrán egy mágneses mérleg látható. A mérendő m tömeg a vízszintes fémrúd közepén lóg, a rúd egy 1,5 T (az ábra síkjába befelé mutató) indukciójú homogén mágneses térben van. A rúd 60 cm hosszú, és különlegesen könnyű anyagból készült, ezért súlyát elhanyagolhatjuk. Vékony függőleges vezetékekkel kapcsolódik a telephez, melyek mentén függőlegesen könnyen elcsúszhat. A telep feszültségének beállításával addig változtatható az áramkör árama, amíg a rúd a ráakasztott tömeget éppen megtartja, nem csúszik sem fölfelé, sem lefelé. A rúddal egy 5 Ω-os ellenállás van sorba kapcsolva, az áramkör többi részének ellenállása elhanyagolható.



(a) Az a vagy a b ponthoz van a telep pozitív sarka kötve? ***(10 pont)***
(b) Ha a telep maximális feszültsége 175 V, mekkora az elrendezés által megtartható legnagyobb tömeg? ***(10 pont)***

Megoldás:
A rúdból és a mérendő testből álló rendszert a rúdra, mint árammal átjárt vezetőre ható Lorentz-erő tartja egyensúlyban a test súlya ellenében. Felfelé mutató Lorentz-erőre van szükség, amiből meghatározható az áram iránya, majd a polaritás is. A maximális áram meghatározza a maximálisan megtartható súlyt is.

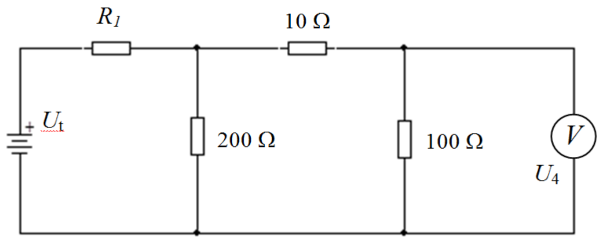
Adatok: B = 1,5 T; L = 60 cm; U_{max} = 175 V; R = 5 Ω

Az árammal átjárt vezetőre ható Lorentz-erő $\mathbf{F}_L = I \cdot \mathbf{L} \times \mathbf{B}$, ahol **L** irányítása a technikai áramiránynak felel meg. Mivel $\mathbf{F}_L$ fölfelé, **B** pedig az ábra síkjába befelé mutat, ezért **L**-nek balról jobbra irányulónak kell lennie. A technikai áramirány a telep pozitív sarkától a negatív felé tart, ezért a pozitív sarok bal oldalon van, vagyis az a-val összeköttetésben. 10 pont

A maximálisan beállítható áram Ohm törvényéből számítható ki: $I_{max} = \frac{U_{max}}{R} = \frac{175\,\text{V}}{5\,\Omega} =$

= 35 A. Ebből a maximális Lorentz-erő nagysága (kihasználva, hogy mindegyik vektor mindegyik másikra merőleges): $F_{L,max} = I_{max} \cdot L \cdot B$ = 35 A·0,6 m·1,5 T = 31,5 N. Ez egyben a legnehezebb megtartható súly, aminek tömege (g szokásos közelítő értékét figyelembe véve) 3,15 kg. 10 pont

12. Mekkorának válasszuk az ábrán látható kapcsolásban az ismeretlen R_1 ellenállást és a telep U_t feszültségét ahhoz, hogy $U_4 = 100$ V és a teljes felvett teljesítmény 200 W legyen? ***(30 pont)***



<u>Megoldás:</u>

Adatok: számozzuk meg az ellenállásokat 1-től 4-ig! R_1 ismeretlen, $R_2 = 200\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $R_4 = 100\ \Omega$, az R_4-en eső feszültség ismert: $U_4 = 100$ V, a teljes rendszer, azaz az R_1–R_4 ellenállások eredője, R_{1234} által felvett teljesítmény $P_{1234} = 200$ W, ezt azonban ismeretlen U_t feszültségforrásból nyerjük.

R_3 soros kapcsolásban van R_4-gyel, ezért rajtuk azonos áram folyik: $I_3 = I_4 = I_{34} = \dfrac{U_4}{R_4} = \dfrac{100\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} = 1$ A.

R_2 párhuzamos kapcsolásban van R_3–R_4 soros eredőjével, R_{34}-gyel (melynek értéke $R_{34} = R_3 + R_4 = 100\ \Omega + 10\ \Omega = 110\ \Omega$), ezért rajtuk azonos feszültség esik: $U_2 = U_{34} = U_{234} = R_{34} \cdot I_{34} = 110\ \Omega \cdot 1\ \mathrm{A} = 110$ V. <u>5 pont</u>

Ez a feszültség R_2–R_4 eredőjén (melynek értéke $R_{234} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_{34}}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{200\,\Omega} + \dfrac{1}{110\,\Omega}} = 71{,}0\ \Omega$)

a megkövetelt teljesítményből $P_{234} = \dfrac{U_{234}^2}{R_{234}} = \dfrac{(110\,\mathrm{V})^2}{71{,}0\,\Omega} = 170{,}5$ W-ot ad le. <u>5 pont</u>

A maradék $P_1 = P_{1234} - P_{234} = 200\ \mathrm{W} - 170{,}5\ \mathrm{W} = 29{,}5$ W-ot R_1-en ugyanakkora áram ejti, mint ami R_2–R_4 eredőjén folyik: $I_1 = I_{234} = I_{1234} = \dfrac{U_{234}}{R_{234}} = \dfrac{110\,\mathrm{V}}{71{,}0\,\Omega} = 1{,}55$ A.

Ebből kiszámítható pl. R_1 értéke: $R_1 = \dfrac{P_1}{I_1^2} = \dfrac{29{,}5\,\mathrm{W}}{(1{,}55\,\mathrm{A})^2} = 12{,}3\ \Omega$. <u>10 pont</u>

A telep feszültsége pedig $U_t = U_1 + U_{234} = R_1 \cdot I_1 + U_{234} = 12{,}3\ \Omega \cdot 1{,}55\ \mathrm{A} + 110\ \mathrm{V} = 129$ V.

Más módon továbbhaladva az R_1-en eső feszültség $U_1 = \dfrac{P_1}{I_1} = \dfrac{29{,}5\,\mathrm{W}}{1{,}55\,\mathrm{A}} = 19{,}0$ V, amiből R_1 értéke: $R_1 = \dfrac{U_1}{I_1} = \dfrac{19{,}0\,\mathrm{V}}{1{,}55\,\mathrm{A}} = 12{,}3\ \Omega$.

A telep feszültsége pedig $U_t = U_1 + U_{234} = 12{,}3\ \Omega \cdot 1{,}55\ \mathrm{A} + 110\ \mathrm{V} = 129$ V. <u>10 pont</u>

13. A 2008-ban felbocsátott *GeoEye-1* műhold a legjobb felbontású képeket készítő civil távérzékelési műholdak egyike. A műhold által készített képek egyik fő felhasználója a Google társaság, Google Earth és Maps szolgáltatásai számára. Pályája nagy pontossággal kör alakú, a földfelszín fölött 684 km magasságban kering. Képalkotó rendszerének fókusztávolsága 13,3 m, fekete-fehér képérzékelője kb. 295 mm széles és magas, ezen belül egy képpont mérete 8 μm. A műhold képalkotó rendszerét tekintsük úgy, hogy a vékony lencsék leképezéséhez hasonlóan működik! Hány négyzetkilométeres területről képes fekete-fehér képet készíteni a műhold, és mekkora méretű földfelszíni tárgy foglal el a képen éppen egy képpontot? ***(20 pont)***


Megoldás:

Ismert a leképezés tárgytávolsága és a fókusztávolság, ezekből a lencseegyenlet megadja a képtávolságot (bár a hatalmas tárgytávolság miatt számításra nincs is feltétlenül szükség, a képtávolság majdnem pontosan a fókusztávolsággal egyenlő). A tárgy- és a képtávolságból kiszámítható a nagyítás, melynek segítségével a megadott két képnagyságnak (a teljes képszenzornak és az egy képpontnak) megfelelő tárgynagyság már következik.

Adatok: t = 684 km; f = 13,3 m; K_1 = 295 mm; $K_2 = 8\ \mu m$. Keresett mennyiségek: T_1^2 és T_2.

A lencseegyenletből $\left(\frac{1}{f}=\frac{1}{k}+\frac{1}{t}\right)$ a képtávolság mindkét esetre

$$k=\frac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{t}}=\frac{1}{\frac{1}{13{,}3\,\mathrm{m}}-\frac{1}{684\,000\,\mathrm{m}}}=13{,}3002\,\mathrm{m}\approx 13{,}3\,\mathrm{m}=f\ .$$

A leképezés nagyítása: $N=-\frac{k}{t}=-\frac{13{,}3\,\mathrm{m}}{684\,000\,\mathrm{m}}=-1{,}94\cdot 10^{-5}$.

Ebből a két tárgynagyság: $T_1=\frac{K_1}{N}=-\frac{-0{,}295\,\mathrm{m}}{-1{,}94\cdot 10^{-5}}=15\,200\,\mathrm{m}=15{,}2\,\mathrm{km}$, valamint

$$T_2=\frac{K_2}{N}=-\frac{-8\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}}{-1{,}94\cdot 10^{-5}}=0{,}411\,\mathrm{m}\,.$$

Természetesen teljes értékű megoldás az is, ha a lencse közepén átmenő fénysugár, az optikai tengely és a tárgy, ill. a kép által alkotott két hasonló derékszögű háromszög befogói arányát használja a versenyző:

$$\frac{T_{1,ill.2}}{t}=\frac{\left|K_{1,ill.2}\right|}{k}\text{, amiből } T_{1,ill.2}=\frac{\left|K_{1,ill.2}\right|}{k}\cdot t\approx\frac{\left|K_{1,ill.2}\right|}{f}\cdot t$$

Ezek szerint a műhold egy képe 15,2 km×15,2 km = 231 km^2-t fed le, és egy képpont 41,1 cm-nek felel meg. 20 pont