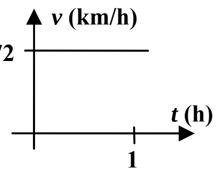
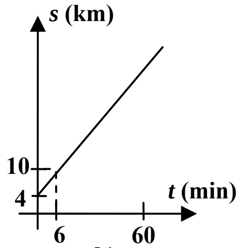
MEGOLDÁSOK ÉS PONTOZÁSI ÚTMUTATÓ

1. Az *A* és a *B* városközpontokat, amelyek 54 km-re vannak egymástól, egyenes országút köti össze. Egy autó az *A* városközpontból indul *B* város felé, délelőtt 10 órakor. Az autó sebességét, mint az idő függvényét az a) ábra mutatja. Egy másik autó szintén 10 órakor indul a *B* város felé, de nem a városközpontból, hanem a városközponttól távolabb, a C pontból. A *C* pont ugyancsak az egyenes országúton található, az *A* város és a *B* város között, *A*-tól 4 km távolságra. A második autónak a megtett útját, mint az idő függvényét a b) ábra mutatja: Az indulástól számított első 6 percben 6 km-t tesz meg, és ugyanilyen ütemben halad tovább.



a)



b)

a) Állapítsd meg, milyen mozgást végeznek az autók! Miért?
b) Mikor és hol éri utol az *A*-ból induló autó a *C*-ből induló autót?
c) Mikor érnek az autók a *B* városközpontba?

Adatok:

v_1= 72 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, s= 54 km, $\Delta s = 4\ \text{km}$, $v_2 = \frac{6\ \text{km}}{0{,}1\ \text{h}} = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Milyen mozgást végeznek az autók? b) Mikor és hol éri utol az *A*-ból induló autó a *C*-ből induló autót? c) Mikor érnek az autók a *B* városközpontba?

Megoldás:

a) Az első autó <u>egyenes vonalú egyenletes mozgást</u> végez v_1= 72 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nagyságú sebességgel (A grafikonról látható, hogy a sebesség állandó). A második autó <u>is egyenes vonalú egyenletes mozgást végez</u>, hiszen út – idő grafikonja egyenes. **2+2 =4 pont**

Ennek az autónak a sebessége $v_2 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10\ \text{km} - 4\ \text{km}}{6\ \text{min}} = \frac{6\ \text{km}}{0{,}1\ \text{h}} = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Az autók találkozásáig, az utolérésig mindkét autó azonos *t* ideig mozgott. A megtett utak: $s_1 = v_1 \cdot t = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$, $s_2 = v_2 \cdot t = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$. Az első autónak $\Delta s = 4\ \text{km}$-rel több utat kellett megtennie, azaz $s_1 = s_2 + 4\ \text{km}$. Így $72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t + 4\ \text{km}$. Innen $t = \frac{4\ \text{km}}{72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} - 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{4\ \text{km}}{12\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{1}{3}\ \text{h} = 20\ \text{min}$. Tehát <u>10 óra 20 perckor éri utol</u> az *A* városból induló autó a második autót. A találkozás helye az *A* várostól $d = v_1 \cdot t = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{3}$ h=24 km-re található (a <u>C ponttól 20 km-re</u>). **3+3=6 pont**

c) Az első autó az indulástól számított $t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{54\ \text{km}}{72\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0,75\ \text{h} = 45\ \text{min}$ elteltével, azaz 10 óra 45 perckor ér a *B* városba. A második autó az indulástól számított $t_2 = \frac{54\ \text{km - 4 km}}{60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}$=0,8333 h = 50 min elteltével, azaz 10 óra 50 perckor ér a *B* városba. **5 pont**

2. Egy kisméretű test 20 m magasságból szabadon esik. Az út első szakasza megtételéhez és a hátralevő út megtételéhez szükséges idők aránya $2\cdot\sqrt{3}+3$. A közegellenállástól tekintsünk el, $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) Mekkora az esés első szakaszának hossza?
b) Mekkora a test sebessége az első szakasz végén?

Adatok:

H = 20 m, $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $x = \frac{t_1}{t_2} = 2\cdot\sqrt{3}+3$

a) h_1= ?, b) v_1 =?

Megoldás:

a) A teljes esési idő a négyzetes úttörvényt felhasználva: $t = \sqrt{\frac{2\cdot H}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 20\ \text{m}}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 2\ \text{s}$. **2 pont**

Másrészt

$$t = t_1 + t_2 = t_1 + \frac{t_1}{2\cdot\sqrt{3}+3} = t_1\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}+3}\right) = t_1\cdot\frac{2\cdot\sqrt{3}+3+1}{2\cdot\sqrt{3}+3} = \frac{2\cdot(\sqrt{3}+2)}{2\cdot\sqrt{3}+3}\cdot t_1 =$$

$$= \frac{2\cdot(\sqrt{3}+2)}{2\cdot\sqrt{3}+3}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{3}-3}{2\cdot\sqrt{3}-3}\cdot t_1 = \frac{4\cdot 3 - 6\cdot\sqrt{3}+8\cdot\sqrt{3}-12}{4\cdot 3-9} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot t_1.$$

Így az első szakasz megtételéhez szükséges idő: $t_1 = \frac{t}{\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\ \text{s}}{\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}} = \frac{3\ \text{s}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ \text{s}.$ **5 pont**

Az esés első szakaszának hossza: $h_1 = \frac{g}{2}\cdot(t_1)^2 = \frac{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}\ \text{s}\right)^2 = 15\ \text{m}.$ **3 pont**

b) A test sebességének nagysága az első szakasz végén:

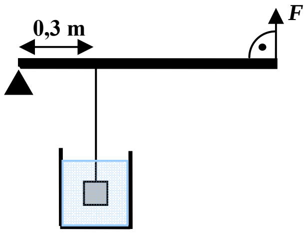
$v_1 = g\cdot t_1 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\sqrt{3}\ \text{s} = 17{,}32\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$ **5 pont**

Megjegyzés: Természetesen az idők arányának $x = 2\cdot\sqrt{3}+3$=6,464 értéke is felhasználható.

Ekkor a teljes időre fennáll, hogy $t = t_1 + t_2 = t_1 + \frac{t_1}{6{,}464} = t_1\cdot(1+\frac{1}{6{,}464}) = t_1\cdot 1{,}1547.$

Így az első szakasz megtételéhez szükséges idő: $t_1 = \frac{t}{1{,}1547} = \frac{2\ \text{s}}{1{,}1547} = 1{,}732\ \text{s}.$

3. Az 1 m hosszú, homogén tömegeloszlású, állandó keresztmetszetű rúd egyik végét alátámasztjuk. A rúdra, az ábrának megfelelően, egy 27 kg tömegű, $\rho_{\text{Al}} = 2,7\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ sűrűségű alumíniumhasábot akasztunk fonál segítségével. A hasábot, az alatta elhelyezett edényben lévő víz teljesen ellepi ($\rho_{\text{víz}} = 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). A rudat az ábra szerint F = 66 N nagyságú erővel vízszintes helyzetben egyensúlyban tarthatjuk.



a) Mekkora erő feszíti a hasábot tartó fonalat?
b) Mekkora a rúd tömege?
c) Mekkora és milyen irányú erő hat az alátámasztásra?

Adatok: l=1 m, $m_{\text{Al}} = 27$ kg, $\rho_{\text{Al}} = 2,7\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $\rho_{\text{víz}} = 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, F =66 N.

a) K = ? , b) $m_{\text{rúd}}$ = ?, c) $F_{\text{alá}}$ = ?

Megoldás:

a) A hasábra a $G_{\text{Al}} = m_{\text{Al}} \cdot g = 27\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 270\ \text{N}$ gravitációs erő, a víz által rá kifejtett

$F_{\text{fel}} = \rho_{\text{víz}} \cdot V \cdot g = \rho_{\text{víz}} \cdot \frac{m_{\text{Al}}}{\rho_{\text{Al}}} \cdot g = 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{27\ \text{kg}}{2,7\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 100\ \text{N}$ nagyságú felhajtóerő és a

fonalat feszítő K erő hat. Mivel a hasáb egyensúlyban van, így a rá ható erők eredője zérus. Tehát a K fonálerő nagysága: $K = G_{\text{Al}} - F_{\text{fel}}$ = 270 N – 100 N = <u>170 N</u>. **6 pont**

b) A rúdra négy erő hat. A rúd középpontjában támadó $G_{\text{rúd}} = m_{\text{rúd}} \cdot g$ nagyságú gravitációs erő, a fonál által kifejtett $K = 170$ N nagyságú fonálerő, az F = 66 N nagyságú erő és az alátámasztásnál támadó $F_{\text{alá}}$ erő. Az alátámasztáson átmenő, vízszintes tengelyre felírt forgatónyomatékokra fennáll, hogy $K \cdot 0,3\ \text{m} + G_{\text{rúd}} \cdot 0,5\ \text{m} = 66\ \text{N} \cdot 1\ \text{m}$. Tehát a rúdra ható gravitációs erő nagysága: $G_{rúd} = \frac{66\ \text{N} \cdot 1\ \text{m} - 170\ \text{N} \cdot 0,3\ \text{m}}{0,5\ \text{m}} = 30\ \text{N}$.

A rúd tömege így $m_{\text{rúd}} = \frac{G_{\text{rúd}}}{g} = \frac{30\ \text{N}}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{3\ \text{kg}}$. **6 pont**

c) Az alátámasztásra ható $F_{\text{alá}}$ erő függőlegesen lefelé mutat és a nagysága:

$F_{\text{alá}} = G_{\text{rúd}} + K - F = 30\ \text{N} + 170\ \text{N} - 66\ \text{N} = 134\ \text{N}$. **3 pont**

4. A 100 kg tömegű kerekes kocsit kell eljuttatni 200 m távolságra. Az 50 kg tömegű gyerek először 100 m hosszan állandó erővel tolja, majd a kocsihoz képest 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú sebességgel felugrik a kocsira. A kocsi éppen 200 m-re áll meg a kiindulási helytől.

a) Mekkora állandó erővel kellett tolni a kocsit, ha a súrlódási együttható a kocsi és a talaj között 0,008?
b) Mekkora a kocsi sebessége a 100 m-es gyorsítás után?

c) Mennyi ideig tartott a kocsit eljuttatni 200 m-re? ($g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

Adatok: M = 100 kg, m = 50 kg, 2s = 200 m, u = 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, F = állandó, μ = 0,008.

Megoldás:
A mozgás második szakasza egyenletesen lassuló mozgás. Ha a felugrás után a kocsi és a gyerek közös sebessége V, akkor a munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)\,\mu g\, s,$$

amiből a V sebesség meghatározható: $V^2 = 2\,\mu g\, s = 2\cdot 0{,}008\cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 100\ \text{m} = 16\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$,

$V = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. **3 pont**

Megjegyzés: A kocsi és a gyerek közös V sebességét a munkatétel nélkül is megadhatjuk.
A kocsit a súrlódási erő lassítja, a lassulás nagysága: $a_l = \mu \cdot g$. A megtett s_2 =100 m-es útra nézve fennáll, hogy

$$s_2 = \frac{a_1}{2}\cdot t_2^2 = \frac{a_1}{2}\cdot\left(\frac{V}{a_1}\right)^2 = \frac{V^2}{2\cdot a_1} = \frac{V^2}{2\cdot\mu\cdot g}.$$

Innen a keresett sebesség: $V = \sqrt{s_2\cdot 2\cdot\mu\cdot g} = \sqrt{100\ \text{m}\cdot 2\cdot 0{,}008\cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A gyerek fölugrása a kocsira rugalmatlan ütközés, amelyre érvényes a lendület megmaradás törvénye. Ha a kocsi felugrás előtti sebessége v, akkor a lendület megmaradás szerint
$Mv + m(u+v) = (M+m)V$.
Ebből a kocsi sebessége a gyorsítás után (a felugrás előtti pillanatban):

$$v = \frac{(M+m)V - mu}{M+m} = \frac{150\,\text{kg}\cdot 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 50\,\text{kg}\cdot 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{150\,\text{kg}} = 3{,}66\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ez a válasz a b) kérdésre. **4 pont**

a) A gyorsítási szakaszra felírható, hogy $s = \frac{v^2}{2a}$, amiből $a = \frac{v^2}{2s} = \frac{3{,}66^2}{2\cdot 100}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0{,}067\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
A kocsi mozgásegyenlete (az F erőn kívül a súrlódási erő hat rá):
$Ma = F - \mu Mg$, ahonnan $F = M(a + \mu g)$ = 100 kg = 100 kg·(0,067 + 0,08) $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ = 14,7 N. **4 pont**

c) A gyorsítási szakaszhoz szükséges idő: $t_1 = \frac{v}{a} = \frac{3{,}66}{0{,}067}$ s = 54,63 s. A lassulási szakaszban eltelt idő: $t_2 = \frac{V}{\mu g} = \frac{4}{0{,}08}$ s = 50 s. Így a teljes 200 m megtétele összesen
$t_1 + t_2$ = 54,63 s + 50 s = 104,6 s ideig tartott. **4 pont**

5. Az m_{hinta}=35 kg tömegű, homogén tömegeloszlású, 4 m hosszúságú mérleghintát rosszul készítették el. A hiba miatt az alátámasztás (a vízszintes forgástengely) a hinta tömegközéppontjához (súlypontjához) képest 45 cm-rel balra került. A hinta jobboldali végére felül egy 40 kg tömegű kisfiú.

a) Egyensúlyba tudja-e hozni a mérleghintát a 72 kg tömegű édesapa, ha a hintára felül?
b) Ha az édesapa a hinta baloldali végér ül, hová kell ülnie a kisfiúnak, hogy a hinta egyensúlyba kerülhessen?

c) Mekkora erő hat ebben az esetben az alátámasztásra (a forgástengelyre)? ($g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

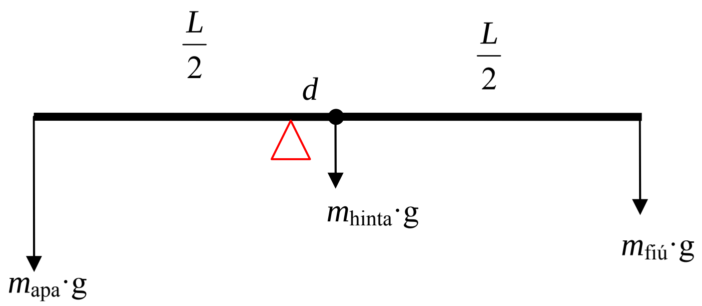
Adatok: $m_{\text{hinta}} = 35$ kg, $L = 4$ m, $d = 45$ cm $= 0,45$ m, $m_{\text{fiú}} = 40$ kg, $m_{\text{apa}} = 72$ kg, $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) Lehet-e egyensúly? b) x_{jobb}=?, c) $F_{\text{alá}}$=?

Megoldás:
a) Ahhoz, hogy a hinta egyensúlyba lehessen, az apának a hinta baloldalára kell ülnie. A hintára ható erők forgatónyomatékai a forgástengelyre vonatkozóan:

$M_1 = m_{\text{fiú}} \cdot g \cdot (\frac{L}{2} + d) + m_{\text{hinta}} \cdot g \cdot d =$

$$= 40\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (\frac{4\,\text{m}}{2} + 0,45\ \text{m}) + 35\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,45\,\text{m} = 980\ \text{Nm} + 157,5\ \text{Nm} = 1137,5\ \text{Nm}.$$



Ha az apa **teljesen** kiül a hinta baloldali végére, akkor az általa létrehozott forgatónyomaték nagysága

$M_2 = m_{\text{apa}} \cdot g \cdot \left(\frac{L}{2} - d\right) = 72\ \text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (\frac{4\ \text{m}}{2} - 0,45\ \text{m}) = 1116\ \text{Nm}$. Mivel ez a forgatónyomaték kisebb, mint M_1, így a hinta nem kerülhet egyensúlyba. **6 pont**

b) A kisfiúnak közelebb kell ülnie a forgástengelyhez. Ekkor $M_1' = m_{\text{fiú}} \cdot g \cdot x_{\text{jobb}} + m_{\text{hinta}} \cdot g \cdot d =$

$= 40\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot x_{\text{jobb}} + 35\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,45\,\text{m} = 400\ \text{N} \cdot x_{\text{jobb}} + 157,5\ \text{Nm}$. Az egyensúly létrejöttének feltétele:

$M_1' = M_2$, azaz $400\ \text{N} \cdot x_{\text{jobb}} + 157,5\ \text{Nm} = 1116\ \text{Nm}$, ahonnan a fiú távolsága a forgástengelytől

$x_{\text{jobb}} = \frac{1116\ \text{Nm} - 175\ \text{Nm}}{400\ \text{N}} = 2,3525\ \text{m}$, tehát

$\Delta x = \frac{L}{2} + d - x_{\text{jobb}} = 2,45\ \text{m} - 2,3525\ \text{m} = 0,0975\ \text{m} = 9,75\ \text{cm}$-rel beljebb kell ülnie a jobboldali hintavégtől. **6 pont**

c) Az alátámasztásra, a forgástengelyre ható erő nagysága

$F_{\text{alá}} = m_{\text{apa}} \cdot g + m_{\text{fiú}} \cdot g + m_{\text{hinta}} \cdot g = (72\ \text{kg} + 40\ \text{kg} + 35\ \text{kg}) \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1470\ \text{N}$. **3 pont**

6. A fűtésre használt földgáz égéshője (fűtőértéke) 21 $\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}$. A gázzal működő készülékkel (gázbojlerrel) 30%-os hatásfok mellett 6 kg 20 °C-os vizet 90 °C-osra melegítünk ($c_{víz} = 4,2\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$). Mennyi földgázt használtunk fel a melegítéshez?

Adatok: $L_é = 21\ \frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}$, η=30 %, $m_{víz}$= 6 kg, t_1=20 °C, t_2=90 °C, $c_{víz} = 4,2\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$.

Megoldás:

A víz melegítéséhez szükséges energia (hőmennyiség) 100%-os hatásfok esetén:

$Q' = c_{víz}\cdot m_{víz}\cdot\Delta t = 4,2\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\cdot 6\ \text{kg}\cdot\left(90\ ^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}\right) = 4,2\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C}}\cdot 6\ \text{kg}\cdot 70\ ^\circ\text{C} = 1764\ \text{kJ}$. **7 pont**

30%-os hatásfok esetén több energia kell: $Q = \frac{Q'}{\eta} = \frac{1764\ \text{kJ}}{0,3}$=5880 kJ. **4 pont**

Ekkora energia $V_{földgáz} = \frac{Q}{L_é} = \frac{5880\ \text{kJ}}{21\ \frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}} = \frac{5880\ \text{kJ}}{21000\ \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}}$=0,28 m^3 elégetése során nyerhető. **4 pont**

7. Egyik végénél felfüggesztett rugóra egy testet erősítünk. Ekkor a rugó megnyúlása 5 cm. Ha a függőleges rugót további 2,5 cm-rel szándékozunk megnyújtani, úgy 0,25 J nagyságú munkát kell végeznünk.

a) Mekkora a rugó rugóállandója?

b) Mekkora a rugóra erősített test tömege? (g =10 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

Adatok:

$\Delta l_1 = 5$ cm, $\Delta l = 2,5$ cm, $\Delta l_2 = \Delta l_1 + 2,5\ \text{cm} = 7,5\ \text{cm}$, $W = 0,25$ J.

a) D = ?, b) m = ?

Megoldás:

b) A rugó eredeti megnyúlására nézve fennáll, hogy $m\cdot g = D\cdot\Delta l_1$.

A rúgóban tárolt energia ekkor: $\left(E_{\text{rugalmas}}\right)_1 = \frac{1}{2}\cdot D\cdot(\Delta l_1)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{m\cdot g}{\Delta l_1}\cdot(\Delta l_1)^2 = \frac{1}{2}\cdot m\cdot g\cdot\Delta l_1$.

A rúgóban tárolt energia Δl_2 megnyúlás esetén: $\left(E_{\text{rugalmas}}\right)_2 = \frac{1}{2}\cdot D\cdot(\Delta l_2)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{m\cdot g}{\Delta l_1}\cdot(\Delta l_2)^2$.

A nagyobb megnyúlás során a gravitációs erő munkát végez, amelynek nagysága:

$W_g = m\cdot g\cdot\Delta l$. Így az általunk végzett munka nagysága: $W = (E_{\text{rugalmas}})_2 - \left[(E_{\text{rugalmas}})_1 + W_g\right]$,

azaz $W = \frac{1}{2}\cdot\frac{m\cdot g}{\Delta l_1}\cdot(\Delta l_2) - (\frac{1}{2}\cdot m\cdot g\cdot\Delta l + W_g)$, illetve

0,25 J= $\frac{1}{2}\cdot\frac{m\cdot g}{0,05\ \text{m}}\cdot(0,075\ \text{m})^2 - (\frac{1}{2}\cdot m\cdot g\cdot 0,05\ \text{m} + m\cdot g\cdot 0,025\ \text{m})$,

0,25 J= $(0,05625\cdot m\cdot g)$ m - $(m\cdot g\cdot 0,05)$ m, ahonnan $m\cdot g = \frac{0,25\ \text{J}}{0,05625\,\text{m} - 0,05\ \text{m}}$ = 40 N.

A test tömege így m = <u>4 kg</u>. **12 pont**

a) Az $m \cdot g = D \cdot \Delta l_1$ összefüggésből a rugó rugóállandója: $D = \dfrac{m \cdot g}{\Delta l_1} = \dfrac{4\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}05\ \text{m}} = 800\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$.

3 pont

8. Függőleges helyzetű, hőszigetelt hengert a tetején 5 kg-os 20 cm^2 keresztmetszetű könnyen mozgó dugattyú zár el. Az edényben kezdetben 300 K-es, 1 liter térfogatú levegő van, a külső levegő nyomása 100 kPa. Az edényben a levegőt beépített fűtőszál segítségével 30 °C-kal felmelegítjük.
a) Mekkora plusz tömeget kell fokozatosan felrakni a dugattyúra, ha azt szeretnénk, hogy a levegő térfogata a melegítés ellenére se változzon?
b) Mennyivel mozdulna el a dugattyú a melegítés hatására, ha ezt a plusz tömeget nem raknánk föl? ($g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

Adatok: m = 5 kg, A = 20 cm^2, T_0 = 300 K, V = 1 liter, p_k = 10^0 kPa, ΔT = 30 °C, T_1 = 330 K
Megoldás:

a) Az edényben a melegítés előtt a nyomás nagyságára fennáll, hogy $p_0 = p_k + \dfrac{mg}{A}$,

$p_0 = 100\ \text{kPa} + \dfrac{5\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{20 \cdot 10^4\ \text{m}^2} = 125\ \text{kPa}.$ **3 pont**

A melegítés állandó térfogaton megy végbe: $\dfrac{p_0}{T_0} = \dfrac{p_1}{T_1}$,

ahonnan $p_1 = \dfrac{T_1}{T_0} p_0 = \dfrac{330}{300} \cdot 125\ \text{kPa} = 137{,}5\ \text{kPa}.$ **3 pont**

A $\Delta p = p_1 - p_0 = 12{,}5$ kPa nyomáskülönbséget a plusz tömeg ellensúlyozza: $\Delta p = \dfrac{\Delta m g}{A}$, azaz

$\Delta m = \dfrac{\Delta p \cdot A}{g} = \dfrac{12{,}5 \cdot 10^3\,\text{Pa} \cdot 20 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{2{,}5\ \text{kg}}.$ **3 pont**

b) A plusz tömeg nélkül a gáz állandó nyomáson tágul: $\dfrac{V}{T_0} = \dfrac{V_1}{T_1}$,

ahonnan $V_1 = \dfrac{T_1}{T_0} V = \dfrac{330}{300} \cdot 1\ \text{liter} = 1{,}1\ \text{liter}.$ **3 pont**

A dugattyú elmozdulása $\Delta x = \dfrac{V_1 - V}{A} = \dfrac{0{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3}{20 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} = 0{,}05\ \text{m} = \underline{5\ \text{cm}}.$ **3 pont**

9. Homogén elektromos mezőben, egy elhanyagolható tömegű, pozitív töltést 0,045 J munka árán juttathatjuk el egy a = 6 cm oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszög AC oldala mentén F-ből A-ba. (Az AC oldal párhuzamos a térerősség-vonalakkal.). A mező térerősségének nagysága $2 \cdot 10^4\ \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$.

a) Hány μC nagyságú a töltés?
b) Mekkora a *C* pont potenciálja az *A* pontéhoz képest?
c) Mekkora munkát végez az elektromos mező a töltésen, ha a töltés az *A* pontból az ABD úton jut el a BC oldal *D* felezőpontjába?
d) Mekkora a munkát végzünk, ha egy 100 μC nagyságú negatív töltést *A*-ból a háromszög oldalai mentén visszajuttatjuk *A*-ba?

Adatok: $W'_{FA} = 0{,}045$ J, a=6 cm=0,06 m, $E=.2\cdot 10^4\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$, $Q' = -100$ μC.

a) Q = ? (μC), b) U_C=?, c) W_{ABD}= ? d) W_{ABCA}=?

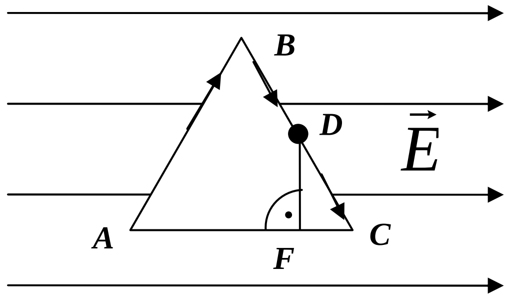
Megoldás:
a) Az elektrosztatikus mezőben a töltésnek az *FA* úton történő elmozdulásához szükséges munkavégzésünk $W_{FA} = F\cdot s = E\cdot Q\cdot s = E\cdot Q\cdot \overline{FA}$, mivel az elmozdulás az erővonalakkal párhuzamosan történik és a töltés mozgatásához szükséges erő iránya megegyezik az elmozdulás irányával. Az $\overline{FA}$ szakasz hossza:

$s = \overline{FA} = \overline{AC} - \overline{FC} = \overline{AC} - \frac{\overline{DC}}{2} = 6\ \text{cm} - \frac{3\ \text{cm}}{2} = 4{,}5\ \text{cm} = 0{,}045\ \text{m}$. Így a töltés nagysága

$$Q = \frac{W'_{FA}}{E\cdot s} = \frac{0{,}045\ \text{J}}{2\cdot 10^4\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot 0{,}045\ \text{m}} = 5\cdot 10^{-5}\ \text{C} = 50\ \mu\text{C}.$$ **3 pont**

b) A *C* pont potenciáljának értéke $U_C = E\cdot a = 2\cdot 10^4\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\cdot 0{,}06\ \text{m} = 1200\ \text{V}$. **3 pont**

c)



Mivel az elektrosztatikus mező konzervatív, a végzett munka nem függ az úttól, csak a kezdő és a végpont helyzetétől, így az *ABD* úton végzett munka megegyezik az *AF* úton végzett munkával. A végzett munka: W_{ABD}= W_{AF} = 0,045 J (hiszen W'_{FA}=W_{AF}). **5 pont**
d) A konzervativitás miatt az *ABCA* úton (zárt görbe!) végzett munka (a töltés nagyságától és előjelétől függetlenül) zérus: W_{ABCA}= 0. **4 pont**

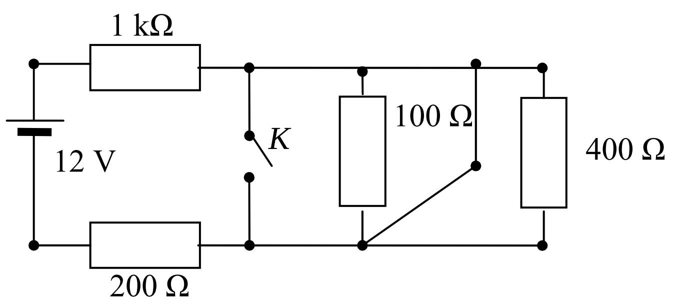
Megjegyzés: A mező által végzett munka a töltés nagyságának ismeretében közvetlenül is kiszámítható:

$$W_{ABD} = W_{AB} + W_{BD} = E\cdot Q\cdot a\cdot\cos 60^\circ + E\cdot Q\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos 60^\circ = E\cdot Q\cdot a\cdot\cos 60^\circ\cdot(1+\frac{1}{2}) =$$

$$= 2\cdot 10^4\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\cdot 50\cdot 10^{-5}\ \text{C}\cdot 0{,}06\ \text{m}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = 0{,}045\ \text{J}.$$

10. U=12 V-os telepből, a K kapcsolóból és négy ellenállásból áramkört állítunk össze.

a) Mekkora feszültség esik az R_1=1 kΩ-os ellenálláson a K kapcsoló nyitott, illetve zárt állásában?



b) Hogyan változik a telepen átfolyó áram erőssége a K kapcsoló zárása után?

c) Mekkora munkát végez a telepen átfolyó áram 2 perc alatt a K kapcsoló zárt állásában?

Adatok: U=12 V, R_1=1 kΩ, R_2=200 Ω, R_3=100 Ω, R_4=400 Ω, t=2 min=120 s.

a) $U_{nyitott}$=?, $U_{zárt}$=?, b) ΔI=?, c) W=?

Megoldás:

a) A kapcsolási rajzon látható, hogy a 100 Ω-os és a 400 Ω-os ellenállás rövidzárban vannak, rajtuk áram nem folyik (K állásától függetlenül). Az áramkörben K nyitott állása mellett az R_1=1 kΩ-os és az R_2= 200 Ω-os ellenállás sorosan vannak kapcsolva. Eredő ellenállásuk: $R = 1\ \mathrm{k\Omega} + 200\ \Omega = 1000\ \Omega + 200\ \Omega = 1200\ \Omega$. A telepen átfolyó áram erőssége így $I = \frac{U}{R} = \frac{12\ \mathrm{V}}{1200\ \Omega} = 0{,}01\ \mathrm{A} = 10\ \mathrm{mA}$. Az 1000 Ω-os ellenálláson eső feszültség értéke

$U_{nyitott} = I \cdot R_1 = 0{,}01\ \mathrm{A} \cdot 1000\ \Omega = 10\ \mathrm{V}$. **6 pont**

A K kapcsoló zárt állásában továbbra is rövidzárban van a 100 Ω-os és a 400 Ω-os ellenállás, azaz az áramviszonyok nem változnak meg, az 1 kΩ-os ellenálláson továbbra is $U_{zárt}$= $U_{nyitott}$ =10 V-os feszültség esik. **3 pont**

b) A fentiek alapján a telepen átfolyó áram erőssége nem változik meg a K kapcsoló zárása után. Így az áramerősség megváltozása ΔI=0. **3 pont**

c) A telepen átfolyó áram munkája $W=U\cdot I_{zárt}\cdot t$=12 V·0,01 A·120 s=14,4 J. **3 pont**

11. A függőleges helyzetű, D rugóállandójú rugóra 10 dkg tömegű testet akasztunk. A test 12 másodperc alatt 36 teljes rezgést végez.

a) Mekkora a rugó rugóállandója?

b) Mekkora Δm tömegű testet akasszunk még a rugóra, hogy a testek 75 teljes rezgést fél perc alatt tegyenek meg?

c) Mennyi periódusidők aránya a két esetben?

d) Mekkora a rugó maximális megnyúlása a második esetben? (g= 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$)

Adatok: m_1 =10 dkg=0,1 kg, Δt_1=12 s, Z_1=36, Δt_2=0,5 min=30 s, Z_2=75.

a) D=?, b) Δm=?, c) $\frac{T_1}{T_2} = ?$, d) $(\Delta l_2)_{max}$=?.

Megoldás:

a) A körfrekvencia értéke az első esetben: $\omega_1 = 2\cdot\pi\cdot f_1 = 2\cdot\pi\cdot\frac{Z_1}{\Delta t_1} = 2\cdot\pi\cdot\frac{36}{12\,\mathrm{s}} = 6\cdot\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}}$, a rugóállandó értéke így: $D = m_1 \cdot \omega_1^{\,2} = 0{,}1\ \text{kg} \cdot \left(6 \cdot \pi\ \frac{1}{\text{s}}\right)^2 = 35{,}53\ \text{kg} \cdot \frac{1}{\text{s}^2} = 35{,}53\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$. **4 pont**

b) A körfrekvencia értéke a második esetben: $\omega_2 = 2 \cdot \pi \cdot f_2 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{Z_2}{\Delta t_2} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{75}{30\,\text{s}} = 5 \cdot \pi\ \frac{1}{\text{s}}$.

A változatlan rugóállandó miatt fennáll, hogy $D = m_1 \cdot \omega_1^{\,2} = m_2 \cdot \omega_2^{\,2}$, ahonnan

$m_2 = m_1 \cdot \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = 0{,}1\ \text{kg} \cdot \left(\frac{6 \cdot \pi\ \frac{1}{\text{s}}}{5 \cdot \pi\ \frac{1}{\text{s}}}\right)^2 = 0{,}144\ \text{kg}$. A rugóra így még

$\Delta m = m_2 - m_1 = 0{,}144\ \text{kg} - 0{,}1\ \text{kg} = 0{,}044\ \text{kg}$ tömegű testet kell akasztani. **4 pont**

c) A periódusidők aránya megegyezik a körfrekvenciák arányának a reciprokával:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2 \cdot \pi}{\omega_1}}{\frac{2 \cdot \pi}{\omega_2}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{5 \cdot \pi\ \frac{1}{\text{s}}}{6 \cdot \pi\ \frac{1}{\text{s}}} = \frac{5}{6}.$$ **3 pont**

d) Az $m_2 = m_1 + \Delta m$ tömegű testre ható gravitációs erő megnyújtja a rugót, a maximális megnyúlásra pedig fennáll, hogy $m_2 \cdot g = D \cdot (\Delta l_2)_{\max}$, azaz

$$(\Delta l_2)_{\max} = \frac{m_2 \cdot g}{D} = \frac{0{,}144\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{35{,}53\ \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0{,}04\ \text{m} = 4\ \text{cm}.$$ **4 pont**

12. Egy tekercsben 40 V egyenfeszültség mellett 12,5 A erősségű áram folyik. Ha a tekercsre 50 Hz frekvenciájú, 40 V effektív értékű szinuszos váltakozó feszültséget kapcsolunk, a tekercsben folyó áram erőssége 1 A.
a) Mekkora a tekercs (ohmikus) ellenállása és önindukciós együtthatója?
b) Mekkora a fáziseltolódás szöge?
c) Mekkora teljesítményt vesz fel a tekercs a váltakozó feszültségű hálózatból?

Adatok: $U_= = 40$ V, $I_= = 12{,}5$ A, $f = 50$ Hz, $U_{\text{eff}} = 40$ V, $I_{\text{eff}} = 1$ A.
a) $R = ?$ $L = ?$, b) $\varphi = ?$, c) $P = ?$

Megoldás:

a) Ohm törvénye alapján: $R = \frac{U_=}{I_=} = \frac{40\ \text{V}}{12{,}5\,\text{A}} = 3{,}2\,\Omega$. **3 pont**

Váltakozó áram esetén a tekercs impedanciájának nagysága: $Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{40\ \text{V}}{1\ \text{A}} = 40\ \Omega$.

Másrészt, $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (L \cdot \omega)^2} = \sqrt{R^2 + (L \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^2}$, innen

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{\sqrt{(40\ \Omega)^2 - (3{,}2\ \Omega)^2}}{2 \cdot \pi \cdot 50\ \text{Hz}} = 0{,}127\ \text{H} = 127\ \text{mH}.$$ **4 pont**

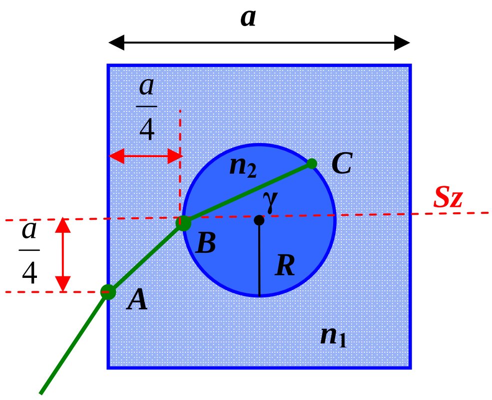
b) A fáziseltolódás szögére nézve fennáll, hogy: $\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{3{,}2\ \Omega}{40\ \Omega} = 0{,}08$, ahonnan $\underline{\varphi = 85{,}41^\circ}$

(az ára késik a feszültséghez képest). **4 pont**

c) A hálózatból felvett teljesítmény nagysága: $P = U_{\mathrm{eff}} \cdot I_{\mathrm{eff}} \cdot \cos\varphi = 40\ \mathrm{V} \cdot 1\ \mathrm{A} \cdot 0{,}08 = \underline{3{,}2\ \mathrm{W}}$.

4 pont

13. Egy levegőben elhelyezett a= 4 cm oldalú, n_1= 1,4 (abszolút) törésmutatójú anyagból készült négyzetes hasábba fúrt lyukba – az ábrának megfelelően - $R = \frac{a}{4}$ sugarú, n_2 (abszolút) törésmutatójú anyagból készített hengert helyeztünk. A hasáb *A* pontjára a rajz síkjában fénysugár érkezik, amelynek haladási irányát a hasábban és a hengerben a rajzon feltüntettük. A hengerben haladó fénysugár γ= 24,36°-os szöget zár be a berajzolt *Sz* szimmetriatengellyel.



a) Mekkora beesési szöggel érkezik a hasábra a fény? b) Mekkora a henger anyagának n_2 törésmutatója? c) Mennyi idő alatt teszi meg a fény az ABC utat? d) Kilép-e a fény a hengerből a C pontnál?
(A fény terjedési sebessége vákuumban $3 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$).

Adatok: a = 4 cm, n_1 = 1,4, $R = \frac{a}{4} = 1$ cm, γ= 24,36°.

a) α = ?, b) n_2 = ?, c) t_{ABC} = ?, d) C-nél kilép-e a fény?.

Megoldás:

a) Az A-nál lévő β törési szög geometriai viszonyok miatt 45°-os. A Snellius-Descartes-törvény alapján $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_1$. Így $\sin\alpha = n_1 \cdot \sin 45° = 1{,}4 \cdot \sin 45° = 0{,}9899$, ahonnan az α beesési szög nagysága $\underline{\alpha = 81{,}85°}$.

3 pont

b) A *B*-nél lévő β beesési szög a geometriai viszonyok miatt 45°-os. A Snellius-Descartes-törvény alapján $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1}$. Ebből $n_2 = n_1 \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 1{,}4 \cdot \frac{\sin 45°}{\sin 24{,}36°} = 2{,}4$.

3 pont

c) A fény terjedési sebessége a hasábban $c_1 = \frac{c_{\text{vákuum}}}{n_1} = \frac{3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}4} = 2{,}143 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. A fény a hasábban $s_1 = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{0{,}04\ \mathrm{m}}{4} \cdot \sqrt{2} = 1{,}41 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$ nagyságú utat tesz meg. Ennek az útnak a megtételéhez $t_1 = \frac{s_1}{c_1} = \frac{1{,}41 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}}{2{,}143 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 6{,}58 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{s}$ nagyságú idő szükséges.

3 pont

A fény terjedési sebessége a hengerben $c_2 = \frac{c_{\text{vákuum}}}{n_2} = \frac{3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2{,}4} = 1{,}25 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

A fény a hasábban $s_2 = 2 \cdot R \cdot \cos\gamma = 2 \cdot 0{,}01\ \mathrm{m} \cdot \cos 24{,}36° = 1{,}82 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$ hosszúságú utat tesz meg (itt felhasználtuk a Thalész-tételt).

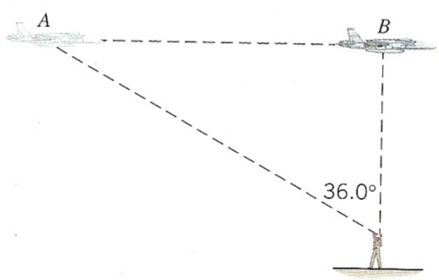
Ennek az útnak a megtételéhez $t_2 = \frac{s_1}{c_1} = \frac{1{,}82 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{1{,}25 \cdot 10^8 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1{,}456 \cdot 10^{-11}$ s nagyságú idő

szükséges. **3 pont**

A teljes idő: $t = t_1 + t_2 = 6{,}58 \cdot 10^{-11}\ \text{s} + 1{,}456 \cdot 10^{-10}\ \text{s} = 2{,}114 \cdot 10^{-10}\ \text{s}$. **1 pont**

d) Szimmetria-okok miatt a *C*-nél levő beesési szög szintén $\gamma = 24{,}36°$, ami a határszögnél kisebb (ugyanis $\sin \alpha_h = n_{1,2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1{,}4}{2{,}4} = 0{,}5833$, azaz $\alpha_h = 35{,}69°$), így a fénysugár kilép *C*-nél a hengerből. **2 pont**

14. Repülőgép nagy magasságban vízszintesen repül. Amikor a repülő éppen a megfigyelő feje fölött van, úgy hallja, mintha a repülőgép hangja az *A* pontból jönne.



a) Ha az *A* pontban a repülő sebessége 164 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, mekkora a sebessége a *B* pontban, ha a repülő gyorsulása állandó? A hang terjedési sebessége 340 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Gyorsul vagy lassul a repülő?

c) Ugyanilyen megfigyelési szöggel mennyi lenne egy állandó sebességgel haladó repülő sebessége?

Adatok: $v_1 = 164\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $c = 340\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\alpha = 36°$

Megoldás:

a) Az *A* és *B* pont közti *s* távolságot a repülő egyenletesen gyorsuló mozgással teszi meg: $s = v_1 t + \frac{1}{2} a t^2$. Ugyanezen *t* idő alatt hang $c \cdot t$ utat tesz meg, és az *A* pontból a megfigyelő fülébe jut

Az ábra alapján $\sin \alpha = \frac{s}{ct} = \frac{v_1 t + \frac{a}{2} t^2}{ct} = \frac{v_1 + \frac{a}{2} t}{c}$.

Ebből $at = 2(c \cdot \sin \alpha - v_1) = 2\left(340\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 36° - 164\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 71{,}69\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A repülő sebessége a *B* pontban $v_2 = v_1 + at = 164\ \frac{\text{m}}{\text{s}} + 71{,}69\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 235{,}69\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. **9 pont**

b) Mivel $at > 0$, a repülőgép gyorsul. **2 pont**

Megjegyzés: Látszik az a) megoldásból, hogy ha $v_1 > 340\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 36° = 200\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, akkor a repülő lassulna.

c) Ha a repülő sebessége állandó, akkor $v = c \sin 36° = 200\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. **4 pont**