1. $t_1 = 10$ h
$s_1 = 40$ km
$t_2 = 10$ h 45 min
$s_2 = 85$ km
$\Delta s_a = 100$ km

a) $v_a = ?$
b) $t = ?$
c) $\Delta v = ?$

a) A motoros $\Delta t = t_2 - t_1 = 45\text{ min} = \frac{3}{4}$ h alatt

$s = s_2 - s_1 = 45$ km utat tett meg. *4 pont*

Sebessége $v_m = \frac{s}{\Delta t} = \frac{45\,\text{km}}{\frac{3}{4}\,\text{h}} = 60$ km/h.

A 100 km hosszúságú utat $t_m = \frac{\Delta s_a}{v_m} = \frac{100\,\text{km}}{60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{5}{3}$ h alatt teszi meg.

Az autósnak a 100 km-t $\frac{5}{3}\text{h} - \frac{3}{4}\text{h} = \frac{11}{12}$ h alatt kell megtennie.

Az autós sebessége $v_a = \frac{100\,\text{km}}{\frac{11}{12}\text{h}} = \frac{1200}{11}\frac{\text{km}}{\text{h}} = \underline{\underline{109{,}1\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}}$. *6 pont*

b) Az autós a motorost $t = 10\text{ h} + \frac{5}{3}\text{ h} =$ <u>11 h 40 perc</u>kor éri utol. *2 pont*

c) Az autós sebessége a motorhoz képest

$\Delta v = v_a - v_m = 0\,\frac{\text{km}}{\text{h}} - 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \underline{\underline{-60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}}$, ha 10 h $< t <$ 10 h 45 min. *1 pont*

$\Delta v = v_a - v_m = 109{,}1\,\frac{\text{km}}{\text{h}} - 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \underline{\underline{49{,}1\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}}$, ha 10 h 45 min $< t <$ 11 h 40 min. *2 pont*

2. A grafikonról leolvasható:
$v_1 = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$t_1 = 4$ h
$v_2 = -20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$t_2 = 6$ h
a) $t < 4$ h, milyen mozgás?, $s_1 = ?$
b) $t > 4$ h, merre halad?
c) $t = ?$, $s = ?$
d) $|\mathbf{s}| = ?$
e) $v_{átl} = ?$

a) Mivel $v = v_1 =$ állandó, a gépkocsi <u>egyenes vonalú egyenletes mozgás</u>t végez.
A megtett út

$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4 \cdot 3600\text{ s} = 288\,000\text{ m} = \underline{\underline{288\text{ km}}}$. *3 pont*

b) Mivel a sebessége negatív előjelű, <u>visszafelé</u> halad. *2 pont*

c) Akkor áll meg, amikor a sebessége zérus, ez $t =$ <u>10 h</u> múlva következik be.
A második szakaszban

$s_2 = \frac{v_2 \cdot t_2}{2} = \frac{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6 \cdot 3600\text{ s}}{2} = 216\,000\text{ m} = 216\text{ km}$ utat tett meg.

Így az indulási helytől $s = 288\text{ km} - 216\text{ km} =$ <u>72 km</u>-re állt meg. *5 pont*

d) Az elmozdulás nagysága $|\mathbf{s}| =$ <u>72 km</u>. *2 pont*

e) Az összes megtett út $s_ö = s_1 + s_2 = 288\text{ km} + 216\text{ km} = 504$ km.

A mozgás teljes ideje $t_ö = 10$ h. Az átlagsebesség

$$v_ö = \frac{s_ö}{t_ö} = \frac{504\,\text{km}}{10\,\text{h}} = \underline{\underline{50{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}} = 14\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

3 pont

3. $a = 5$ cm
$b = 1$ cm
$F = 221$ N
$\rho = 13\,600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

a) $V = ?$ dl
b) $|G - F| = ?$
c) különbség oka?

a) A hidrosztatikai nyomóerő nagysága
$F = \rho\, g\, H\, A$, ahonnan a higany magassága

$$H = \frac{F}{\rho g A} = \frac{F}{\rho g a^2} = \frac{221\,\text{N}}{1{,}36 \cdot 10^4\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 25 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2},$$

$H == 0{,}65$ m $= 65$ cm.
A csőben a higany hossza $h = H - a = 65\ \text{cm} - 5\ \text{cm} = 60$ cm.
Az edénybe töltött higany térfogata
$V = a^3 + b^2 h = 125\ \text{cm}^3 + 1\ \text{cm}^2 \cdot 60\ \text{cm} = 185\ \text{cm}^3 = 0{,}185\ \text{l} = \underline{\underline{1{,}85\ \text{dl}}}.$

7 pont

b) A higanyra ható gravitációs erő:

$$G = \rho V g = 13{,}6 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0{,}185 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 25{,}16\ \text{N}.$$

$|G - F| = |25{,}16\ \text{N} - 221\ \text{N}| = \underline{\underline{195{,}84\ \text{N}}}.$ *4 pont*

c) A jelenséget hidrosztatikai paradoxonnak nevezik. A fedőlap is nyomja a higanyt, ezért a fenékre ható nyomóerő nagyobb lesz a folyadék súlyánál. *4 pont*

4. $m = 20$ kg
$R = 1$ m
$\mu = 0{,}125$
$v_0 = 36\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

a) $F(t{=}0) = ?$
b) $F(t) = ?$, grafikon
c) $s(t_v) = ?$

a) A centripetális erőt a kötélerő adja:

$$F = m\frac{v^2}{R}.$$

A testre ható súrlódási erő érintő irányú, de az indulás pillanatában még nem hat, így nem csökkenti a sebességet, tehát

$$F_0 = m\frac{v_0^2}{R} = 20\ \text{kg} \cdot \frac{100\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{1\ \text{m}} = \underline{\underline{2000\ \text{N}}}.$$

3 pont

b) A test egyenletesen lassuló mozgást végez. A mozgásegyenlet érintő irányú komponense:

$m a_t = -\mu m g$, amiből $a_t = -\mu g = -\,0{,}125 \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -1{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

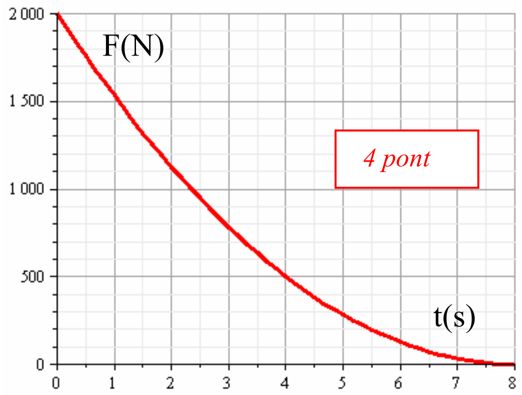
A sebesség változása: $v(t) = v_0 + a_t t = v_0 - \mu g t$.
A test akkor áll meg, amikor a sebessége zérus lesz: $0 = v_0 - \mu g t_v$,

$$\text{amiből}\ \ t_v = \frac{v_0}{\mu g} = \frac{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 8\ \text{s}.$$

A kötélerő mint az idő függvénye: $F = m\dfrac{v^2}{R} = m\dfrac{(v_0 - \mu g t)^2}{R} = \dfrac{20\,\text{kg}}{1\,\text{m}}\left(10\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} - 1{,}25\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t\right)^2,$

$F = 2000\ \mathrm{N} - 500\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}} \cdot t\ + 31{,}25 \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2$. *5 pont*

A függvényt ábrázolva (parabolaív):



c) A megtett út:

$$s = \frac{a}{2} t_v^{\,2} = \frac{1{,}25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} \cdot 64\ \mathrm{s}^2 = \underline{\underline{40\ \mathrm{m}}}.$$ *3 pont*

5. $F = 6{,}4$ N

$g = 10\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$\rho_1 = 11 \cdot \rho_{víz}$

$\rho_{víz} = 10^3\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

---

a) m = ? , hová?
b) a = ?
c) G = ?

a) A fonálon vízbe lógatott testre a víz $F_f = V\rho_{víz}g$ nagyságú felhajtóerőt gyakorol. A test ugyanekkora erőt fejt ki a vízre, tehát az egyensúly fennmaradásához a <u>baloldali</u> serpenyőbe kell tenni *2 pont*

$M = \dfrac{F_f}{g} = V\rho_{víz}$ nagyságú tömeget. *1 pont*

Másrészt a fonálerő:

$F = mg - F_f = V\rho_1 g - V\rho_{víz}g = 10\ V\rho_{víz}g$.

Így $M = V\rho_{víz} = \dfrac{F}{10g} = \dfrac{6{,}4\,\mathrm{N}}{10 \cdot 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \underline{\underline{0{,}064\ \mathrm{kg} = 64\ \mathrm{g}}}$. *7 pont*

b) mivel $V = a^3$, ezért

$$a = \sqrt[3]{\frac{F}{10g\rho_{víz}}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}4\,\mathrm{N}}{10 \cdot 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}} = \underline{\underline{0{,}04\ \mathrm{m} = 4\ \mathrm{cm}}}.$$ *3 pont*

c) Ha a kocka nincs a vízben, a tartóerő a kocka súlya:

$G = mg = V\rho_1 g = 11 \cdot V\rho_{víz}g = 11 \cdot Mg = 11 \cdot 0{,}064\ \mathrm{kg} \cdot 10\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{7{,}04\ \mathrm{N}}}$. *2 pont*

6. $s = 20$ m

$\alpha = 30°$

$m_1 = 5$ kg

$v_1 = 0$

$m_2 = 1$ kg

$v_2 = 72\ \dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 20\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$g = 10\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

---

a) t = ?
b) s_1 = ?
c) u = ?

a) A lejtőn a gyorsulás $a = g\sin\alpha = 10\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \dfrac{1}{2} = 5\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Ha t idő múlva találkoznak, a találkozásig a testek megtett útja:

$s_1 = \dfrac{a}{2} t^2$, illetve $s_2 = v_2 t - \dfrac{a}{2} t^2$, és fennáll hogy $s = s_1 + s_2$.

Így $s = \dfrac{a}{2} t^2 + v_2 t - \dfrac{a}{2} t^2 = v_2 t$, azaz $t = \dfrac{s}{v_2} = \dfrac{20\,\mathrm{m}}{20 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \underline{\underline{1\ \mathrm{s}}}$. *6 pont*

b) A lejtő tetejétől számítva $s_1 = \dfrac{a}{2} t^2 = \dfrac{5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} \cdot 1\mathrm{s}^2 = \underline{\underline{2{,}5\ \mathrm{m}}}$-re találkoznak. *3 pont*

c) Az ütközés előtti sebességek:

$v_{11} = at = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 1\ \text{s} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_{22} = v_2 - at = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 1\ \text{s} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A rugalmatlan ütközésre a lendület-megmaradás törvényét lehet felírni.

$m_1 v_{11} - m_2 v_{22} = (m_1 + m_2)u$,

$$u = \frac{m_1 v_{11} - m_2 v_{22}}{m_1 + m_2} = \frac{5\,\text{kg}\cdot 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 1\,\text{kg}\cdot 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{6\,\text{kg}} = \underline{\underline{1{,}67\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$ Iránya a <u>lejtőn lefelé</u> mutat. *6 pont*

7. $m = 10^3$ kg
$L = 100$ m
$M = 10^{30}$ kg
$r = 10^3$ km $= 10^6$ m
$\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

a) $a = ?$
b) $F = ?$

a) Az m tömegű testek közti gravitációs erő sokkal kisebb, mint a bolygó vonzóereje, ezért az előbbit elhanyagolhatjuk:

$$\gamma\frac{m^2}{L^2} << \gamma\frac{mM}{r^2}$$ (mert $M >> m$ és $r >> L$). *2 pont*

A testek mozgásegyenlete:

$$ma = \gamma\frac{mM}{r^2} - F,$$

$$ma = \gamma\frac{mM}{(r+L)^2} + F.$$

Az egyenleteket összeadva kapjuk az űrállomás gyorsulását:

$$a = \frac{\gamma M}{2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+L)^2}\right) = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\cdot 10^{30}\,\text{kg}}{2}\cdot\left(\frac{1}{10^{12}\,\text{m}^2} + \frac{1}{(10^6+10^2)^2\,\text{m}^2}\right),$$

$$a = \underline{\underline{6{,}67\cdot 10^7\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}.$$ *7 pont*

Megjegyzés: Mivel $x = \frac{L}{r}$. $<< 1$, felhasználhatjuk, hogy $(1+x)^{-2} \approx 1 - 2x$. Így a gyorsulás

$$a \approx \frac{\gamma M}{2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2(1+x)^2}\right) \approx \frac{\gamma M}{2r^2}[1 + 1 - 2x] = \frac{\gamma M}{r^2}[1 - \frac{L}{r}] \approx \gamma\frac{mM}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^7\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) A mozgásegyenleteket kivonva kapjuk a kötélerőt:

$$F = \frac{\gamma mM}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+L)^2}\right) = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\cdot 10^3\,\text{kg}\cdot 10^{30}\,\text{kg}}{2}\cdot\left(\frac{1}{10^{12}\,\text{m}^2} - \frac{1}{(10^6+10^2)^2\,\text{m}^2}\right),$$

$$F = \underline{\underline{6{,}67\cdot 10^6\ \text{N}}}.$$ *6 pont*

Megjegyzés: Használva a gyorsulásnál is ajánlott közelítést, most azt kapjuk, hogy

$$F = \frac{\gamma mM}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2(1+x)^2}\right) \approx \frac{\gamma mM}{2r^2}[1 - (1 - 2x)] = \frac{\gamma mM}{r^2}\frac{L}{r},$$

$$F \approx \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 10^3\cdot 10^{30}\cdot 100}{10^{18}}\,\text{N} = 6{,}67\cdot 10^6\ \text{N}.$$

8. A: $T_0 = 300$ K
$p_0 = 3\cdot 10^5$ Pa
$V_0 = 2$ dm^3
B: $p_1 = p_0/3 = 10^5$ Pa
$V_1 = 5V_0 = 10$ dm^3

a) n =?
b) T_1 = ?
c) $V(T_{max})$ = ?
d) $T_{\max}$ = ?

a) Az állapotegyenlet a gáz A állapotában:
$p_0V_0 = nRT_0$, ahonnan

$$n = \frac{p_0V_0}{RT_0} = \frac{3\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\cdot 2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3}{8{,}31\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}\cdot 300\ \mathrm{K}} = \underline{\underline{0{,}2407\ \mathrm{mol}}}.$$ *2 pont*

b) $\dfrac{p_0V_0}{T_0} = \dfrac{p_1V_1}{T_1}$, ahonnan

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{p_0V_0}T_0 = \frac{\frac{p_0}{3}\cdot 5V_0}{p_0V_0}T_0 = \frac{5}{3}T_0 = \underline{\underline{500\ \mathrm{K}}}.$$ *2 pont*

c) Az AB állapotváltozásra meg kell határozni a $T(V)$ függvényt, és megkeresni azt a V térfogatot, ahol a T értéke maximális.
Az állapotegyenletből:
$T = \dfrac{p(V)\cdot V}{p_0V_0}T_0$. A $p(V)$ függvény a diagram szerint egy egyenes, melynek meredeksége
$m = -\dfrac{2p_0}{3\cdot 4V_0} = -\dfrac{1}{6}\dfrac{p_0}{V_0}$. Így az egyenes egyenlete:

$$p = -\frac{1}{6}\frac{p_0}{V_0}(V - 5V_0) + \frac{p_0}{3}.$$

$$T(V) = \frac{T_0}{p_0V_0}V\left(-\frac{1}{6}\frac{p_0}{V_0}(V-5V_0) + \frac{p_0}{3}\right) = \frac{T_0}{V_0}\left(-\frac{1}{6}\frac{V^2}{V_0} + \frac{5}{6}V + \frac{V}{3}\right),$$

$$T(x) = \frac{T_0}{6}\left(-x^2 + 7x\right), \qquad \text{ahol } x = \frac{V}{V_0}.$$

Ez parabola egyenlete, a szélsőérték teljes négyzetté alakítással kereshető meg (vagy a $T(x)$ függvény x szerinti deriváltja nulla):

$$T(x) = -\frac{T_0}{6}\left(\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}\right),$$ azaz $x = 3{,}5$. Így $V = 3{,}5V_0 = \underline{\underline{7\ \mathrm{dm}^3}}$. *9 pont*

d) A maximális hőmérséklet:

$$T_{\max} = \frac{T_0}{6}\left(-3{,}5^2 + 7\cdot 3{,}5\right) = 2{,}04T_0 = \underline{\underline{612{,}5\ \mathrm{K}}}.$$ *2 pont*

9. $M > m$
$h = 4$ m
$h_1 = 25$ m
$g = 10\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
$m = 0{,}1$ kg

a) M = ? (kg)
b) E_M = ?

a) A testek sebessége h magasságból esés után:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{80}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 8{,}94\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Az m tömeg kezdősebessége az ütközés után

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = 10\sqrt{5}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 22{,}36\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

m és M rugalmasan ütközik a talajnál, azaz a lendület- és energiamegmaradás írható föl. Legyen a fölfelé mutató irány pozitív, és az M sebessége ütközés után u.

$Mv - mv = Mu + mv_1$ (1)

$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}mv_1^{\ 2}$ (2)

$Mv - Mu = mv + mv_1 = m(v + v_1)$

$Mv^2 - Mu^2 = +mv_1^{\ 2} - mv^2$

---

(2) $\rightarrow M(v-u)(v+u) = m\,(v_1 - v)(v_1 + v)$, (1)-et figyelembevéve

$v + u = v_1 - v,$ így

$u = v_1 - 2v$, számadatokkal $u = 22{,}36\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 2\cdot 8{,}94\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 4{,}48\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Visszahelyettesítve u kifejezését (1)-be

$$M = m\frac{v+v_1}{v-u} = m\frac{v+v_1}{3v - v_1}.$$

Számadatokkal:.

$$M = 0{,}1\ \mathrm{kg}\cdot\frac{8{,}94 + 22{,}36}{3\cdot 8{,}94 - 22{,}36} = 0{,}702\ \mathrm{kg} \approx \underline{\underline{0{,}7\ \mathrm{kg}}}.$$ *12 pont*

b) $E_M = \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{0{,}702\,\mathrm{kg}\cdot 4{,}48^2}{2}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 7{,}04\ \mathrm{J} \approx \underline{\underline{7\ \mathrm{J}}}.$ *3 pont*

Megjegyzés: A tömeg pontosan 0,7 kg, és a mozgási energia pontosan 7 J. Ellenőrizhetjük, ha végig paraméteresen számolunk:

a) $M = m\frac{v+v_1}{3v-v_1} = m\frac{v+v_1}{3v-v_1} = m\frac{(v+v_1)(3v+v_1)}{(3v-v_1)(3v+v_1)} = m\frac{3v^2 + 4vv_1 + v_1^{\ 2}}{9v^2 - v_1^{\ 2}}$,

$$M = m\frac{3h + 4\sqrt{h\cdot h_1} + h_1}{9h - h_1} = m\frac{3\cdot 4 + 4\sqrt{4\cdot 25} + 25}{9\cdot 4 - 25} = 7m.$$

b) $E_M = \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{7m}{2}(v_1 - 2v)^2 = \frac{7m}{2}(v_1^{\ 2} - 4vv_1 + 4v^2)$,

$$E_M = \frac{7m}{2}\cdot 2g(h_1 - 4\sqrt{hh_1} + 4h) = 0{,}7\ \mathrm{kg}\cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ (25 - 4\sqrt{4\cdot 25} + 4\cdot 4)\ \mathrm{m} = 7\ \mathrm{J}.$$

10. $U = 6$ V
$R_1 = 400\ \Omega$
$R_2 = 200\ \Omega$
$P' = 4\cdot P_{200}$

---

a) U_{400} = ?
b) ΔP = ?
c) P_{ny} = ?
d) R = ?

a) A 100 Ω-os, az 50 Ω-os, és a 300 Ω-os ellenállások rövidre vannak zárva a K kapcsoló állásától függetlenül. *3 pont*

Így a 400 Ω-os ellenálláson eső feszültség a kapcsoló bármely állása esetén:

$U_{400} = U\cdot\frac{R_1}{R_1 + R_2} = 6\ \mathrm{V}\cdot\frac{400\,\Omega}{400\,\Omega + 200\,\Omega} = \underline{\underline{4\ \mathrm{V}}}.$ *3 pont*

b) A telep teljesítménye nem változik, $\Delta P = 0$. *1 pont*

c) A telep teljesítménye bármelyik kapcsolóállásban:

$$P = \frac{U^2}{R_1 + R_2} = \frac{36\,\mathrm{V}^2}{400\,\Omega + 200\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}06\ \mathrm{W}}}.$$ 2 pont

d) A 200 Ω-os ellenálláson eső teljesítmény akkor lehet négyszeres, ha a rajta átfolyó áram az eredetinek 2-szerese ($P = I^2R$ miatt). Mivel az eredeti eredő ellenállás 600 Ω, az áram akkor lesz 2-szeres, ha az új eredő ellenállás 300 Ω. Ezt úgy érhetjük el, hogy a 400 Ω-os ellenállással párhuzamosan kötünk egy R ellenállást, hogy az eredőjük 100 Ω legyen, 3 pont
azaz

$$\frac{1}{100\,\Omega} = \frac{1}{400\,\Omega} + \frac{1}{R}.$$

Innen $\frac{1}{R} = \frac{1}{100\,\Omega} - \frac{1}{400\,\Omega} = \frac{3}{400\,\Omega}$, azaz $R = \frac{400}{3}\,\Omega = \underline{\underline{133{,}33\ \Omega}}$. 3 pont

11. $D = 200\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

$m_r = 20$ dkg, $m_t = 800$ g $= 0{,}8$ kg

$m = m_r + m_t = 1$ kg

$g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$x = 7{,}5$ cm

---

a) $x_0 = ?$

b) $F = ?$

c) $W = ?$

d) $f = ?$

a) Az egyensúly esetén fennáll, hogy
$2 \cdot Dx_0 = mg$.
Így a rugók kezdeti megnyúlása:

$$x_0 = \frac{mg}{2D} = \frac{1\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot 200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}} = 0{,}025\ \mathrm{m} = \underline{\underline{2{,}5\ \mathrm{cm}}}.$$ 3 pont

b) A további nyújtáshoz már csak a rugó ellenében kell erőt kifejtenünk, így

$$F = 2Dx = 2 \cdot 200\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}075\ \mathrm{m} = \underline{\underline{30\ \mathrm{N}}}.$$ 3 pont

c) Mivel változó erő végez munkát:

$$W = \frac{1}{2}Fx = \frac{1}{2} \cdot 30\ \mathrm{N} \cdot 0{,}075\ \mathrm{m} = \underline{\underline{1{,}125\ \mathrm{J}}}.$$ 5 pont

d) A test mozgásegyenlete $ma = -2Dy$, ahol y az egyensúlyi helyzettől való kitérés, ezért

$$\omega = \sqrt{\frac{2D}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{1\,\mathrm{kg}}} = 20\ \mathrm{s}^{-1}.$$

A rezgés frekvenciája $f = \frac{\omega}{2\pi} = \underline{\underline{3{,}18\ \mathrm{s}^{-1}}}$. 4 pont

12. $U_1 = 110$ V

$P_1 = 40$ W

$U = 230$ V

$f = 50$ Hz

$t = 5$ h

ár = 33 Ft/kWh

---

a) $R_e = ?$

a) Az izzón átfolyó áram erőssége

$$I = \frac{P_1}{U_1} = \frac{40\,\mathrm{W}}{110\,\mathrm{V}} = 0{,}3636\ \mathrm{A}.$$

Az előtét ellenálláson $U_e = U - U_1 = 120$ V feszültség esik, így

$$R_e = \frac{U_e}{I} = \frac{120\,\mathrm{V}}{0{,}3636\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{330\ \Omega}}.$$ 4 pont

b) Kapacitív ellenállás esetén a kondenzátoron eső feszültség:

$$U_C = \sqrt{230^2 - 110^2}\ \mathrm{V} = 202\ \mathrm{V}.$$

b) $C = ?$
c) $\Delta k = ?$

Így $X_C = \frac{U_C}{I} = \frac{202\,\text{V}}{0{,}3636\,\text{A}} = 555{,}5\ \Omega$. Mivel $X_C = (C\omega)^{-1}$, ahonnan
$C = (X_C{\cdot}2\pi f)^{-1} = (555{,}5\ \Omega{\cdot}2\pi{\cdot}50\ \text{Hz})^{-1} = \underline{\underline{5{,}73\ \mu\text{F}}}$. *6 pont*

c) Az áramforrás teljesítménye ohmos előtét esetén:
$P = U{\cdot}I = 230\ \text{V}{\cdot}0{,}3636\ \text{A} = 83{,}63\ \text{W}$.
A hatásos teljesítmény kapacitív előtét esetén
$P' = U{\cdot}I{\cdot}\cos\varphi = U{\cdot}I\,\frac{U_1}{U} = U_1\,I = 110\ \text{V}{\cdot}0{,}3636\ \text{A} = 40\ \text{W}$ (most csak az izzón van teljesítmény)·
A megtakarított teljesítmény $\Delta P = P - P' = (230\ \text{V} - 110\ \text{V}){\cdot}0{,}3636\ \text{A} = 43{,}63\ \text{W}$.
Így a megtakarítás összege:
$\Delta k = \Delta P\cdot t\cdot \acute{a}r = 43{,}63\ \text{W}{\cdot}5\ \text{h}\cdot 33\ \frac{\text{Ft}}{\text{kWh}} = \underline{\underline{7{,}2\ \text{Ft}}}$. *5 pont*

13. $n = 11$
$a = 10\ \text{cm} = 0{,}1\ \text{m}$
$\rho = 600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

a) $W = ?$
b) $x_s = ?$ $y_s = ?$

a) Egy kocka tömege $m = a^3\rho = 10^{-3}\ \text{m}^3{\cdot}600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0{,}6\ \text{kg}$.
Az alsó sor (4 kocka) elhelyezéséhez nem kell munkát végezni:
$W_1 = 0$.
A második sor (3 kocka) elhelyezéséhez
$W_2 = 3mg{\cdot}a = 3{\cdot}0{,}6\ \text{kg}{\cdot}10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}{\cdot}0{,}1\ \text{m} = 1{,}8\ \text{J}$ munkát kell végezni.
A harmadik sor (2 kocka) elhelyezéséhez
$W_3 = 2mg{\cdot}2a = 2{\cdot}0{,}6\ \text{kg}{\cdot}10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}{\cdot}2{\cdot}0{,}1\ \text{m} = 2{,}4\ \text{J}$ munkát kell végezni.

A negyedik sor (2 kocka) elhelyezéséhez
$W_4 = 2mg{\cdot}3a = 2{\cdot}0{,}6\ \text{kg}{\cdot}10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}{\cdot}3{\cdot}0{,}1\ \text{m} = 3{,}6\ \text{J}$ munkát kell végezni.
A minimális munka (csak emelés történik):
$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = (0 + 1{,}8 + 2{,}4 + 3{,}6)\ \text{J} = \underline{\underline{7{,}8\ \text{J}}}$. *8 pont*
b) A 11 kocka össztömege $M = 11m = 11{\cdot}0{,}6\ \text{kg} = 6{,}6\ \text{kg}$.
A végzett munka a tömegközéppont elmozdulásával fölírva: $W = Mgh$. Így

$$h = \frac{W}{Mg} = \frac{7{,}8\ \text{J}}{6{,}6\ \text{kg}\cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 11{,}81\ \text{cm}.$$

A kiindulási helyzetben a tömegközéppont $\frac{a}{2} = 5\ \text{cm}$ magasságban volt, így a tömegközéppont a talaj felett $y_s = 11{,}81\ \text{cm} + 5\ \text{cm} = \underline{16{,}81\ \text{cm}}$ magasságban van. *5 pont*
Az építmény tengelyes szimmetriája miatt a tömegközéppont <u>a szimmetriatengelyen</u> van. *2 pont*

Megjegyzés: a tömegközéppont a munka felhasználása nélkül, közvetlenül is kiszámítható:

$$y_s = \frac{4\cdot\frac{a}{2}+3\cdot\frac{3a}{2}+2\cdot\frac{5a}{2}+2\cdot\frac{7a}{2}}{11} = \frac{37}{22}\cdot a = 16{,}81\ \text{cm.}$$

14. $m_1 = 0{,}1$ kg
$v_1 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$m_2 = 0{,}4$ kg
$v_2 = 0$
$D = 5\,000\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$
$l_0 = 5$ cm

a) $u_1 = ?$ $u_2 = ?$
b) $u = ?$
c) $x_{min} = ?$

a) Az ütközés tökéletesen rugalmas, így fennáll a lendület- és az energia-megmaradás törvénye:

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2u_2 \qquad (1)$$

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2u_2^2 \rightarrow m_1(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2u_2^2$$

$$v_1 + u_1 = u_2$$

Visszaírva (1)-be: $m_1(v_1 - u_1) = m_2(v_1 + u_1)$, ahonnan

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\cdot v_1 = -\frac{3}{5}v_1 = \underline{\underline{-6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}, \qquad u_2 = v_1 + u_1 = (10-6)\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

4 pont

b) A testek legjobban akkor közelítik meg egymást, mikor a rugó maximálisan összenyomódott. Relatív sebességük ekkor nulla, azaz a talajhoz képest a sebességük azonos. Ez egyébként éppen a tömegközéppont sebessége:

$$u = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}1\,\text{kg}}{0{,}1\,\text{kg} + 0{,}5\,\text{kg}}\cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

4 pont

c) Az energiatételből a b)-ben mondottak szerint a rugó összenyomódása:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 + \frac{1}{2}Dx^2,$$

$$x = \sqrt{\frac{m_1v_1^2 - (m_1+m_2)u^2}{D}} = \sqrt{\frac{0{,}1\,\text{kg}\cdot 100\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 0{,}5\ \text{kg}\cdot 4\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{5000\,\frac{\text{N}}{\text{m}}}} = 0{,}04\ \text{m} = 4\ \text{cm}.$$

6 pont

Figyelembe véve a rugó eredeti hosszát, a testek $x_{min} = l_0 - x = 5\ \text{cm} - 4\ \text{cm} = \underline{\underline{1\ \text{cm}}}$-re közelítik meg egymást. *1 pont*

15. $L = 1{,}7$ mH
$C = 3\ \mu$F
$R = 3{,}5\ \Omega$
$X_L = 2X_{L0}$

a) $I_0 = ?$
b) $I = ?$
c) $\Delta I = ?$

a) Az áramkör rezonanciafrekvenciája az $X_{L0} = X_C$ összefüggésből határozható meg, amely alapján

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = (1{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{H}\cdot 3\cdot 10^{-6}\ \text{F}) = 14\,003\ \text{Hz}.$$

Rezonancia esetén $Z = R$, így az áramerősség

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{9\,\text{V}}{3{,}5\,\Omega} = \underline{\underline{2{,}571\ \text{A}}}.$$

7 pont

b) Az impedancia a fém jelenléte esetén $Z = \sqrt{R^2 + (2X_{L0} - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X_{L0}{}^2}$,

$Z = \sqrt{3{,}5^2 + (1{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 14{,}003 \cdot 10^3)^2}\ \Omega = 24{,}056\ \Omega.$

$I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{9\,\mathrm{V}}{24{,}056\ \Omega} = \underline{\underline{0{,}374\ \mathrm{A}}}.$ 7pont

c) Az áramerősség csökkent, ΔI = 2,571 A – 0,374 A = $\underline{\underline{2{,}197\ \mathrm{A}}}$-rel. 1 pont

16. t_o =327,3 °C
c = 128 J/(kg·K)
L_o = 23 866 J/kg
t = 30 °C

---

v = ?

$\Delta t = t_o - t$ = 327,3 °C – 30 °C = 297,3 K.
A golyó mozgási energiája teljes egészében hővé (melegedés + olvadás) alakul:

$\frac{1}{2}mv^2 = mc\,\Delta t + mL_o$, 8 pont

$v = \sqrt{2(c\Delta t + L_o)}$.

$v = \sqrt{2(128\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} \cdot 297{,}3\,\mathrm{K} + 23866\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}})} \approx \underline{\underline{352\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}.$ 7 pont