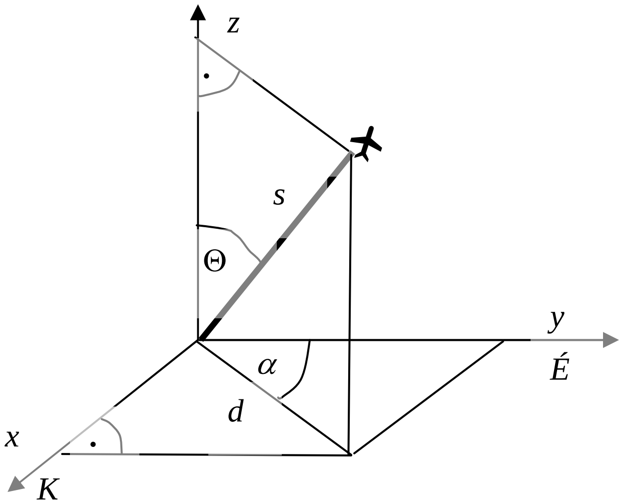
Az I. forduló megoldásai

1. $h = 500\text{ m}$
$s = 15\text{ km} = 15\,000\text{ m}$
$\alpha = 30°$ ÉK

$x = ?\ y = ?\ z = ?$



Az ábra alapján

$z = h = \underline{\underline{500\text{ m}}}$ *4 pont*

$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 = d^2 + z^2$

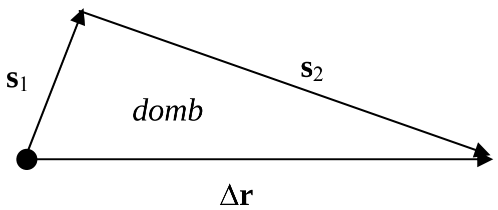
$d = \sqrt{s^2 - z^2} = \sqrt{(15000)^2 - (500)^2}\text{ m}$

$d = 14\,992\text{ m}$

$x = d\sin\alpha = d\,\frac{1}{2} = \underline{\underline{7\,496\text{ m}}}$ *7 pont*

$y = d\cos\alpha = d\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{12\,983\text{ m}}}$ *4 pont*

2. $s_1 = 400\text{ m} = 0{,}4\text{ km}$
$v_1 = 2\text{ km/h}$
$s_2 = 0{,}3\text{ km}$
$v_2 = \frac{5}{6}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 3\text{ km/h}$



a) $t_{össz} = ?$
b) $v_{átl} = ?$
c) $|\mathbf{v}_{átl}| = ?$

a) $t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{0{,}4\text{ km}}{2\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}2\text{ h},$ *2 pont* $t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{0{,}3\text{ km}}{3\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}1\text{ h},$ *2 pont*

$t_{össz} = t_1 + t_2 = 0{,}3\text{ h} = 18\text{ min} = \underline{\underline{1080\text{ s}}}.$ *1 pont*

b) $v_{átl} = \frac{s_{össz}}{t_{össz}} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{0{,}7\text{ km}}{0{,}3\text{ h}} = 2{,}33\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \underline{\underline{0{,}648\text{ m/s}}}.$ *5 pont*

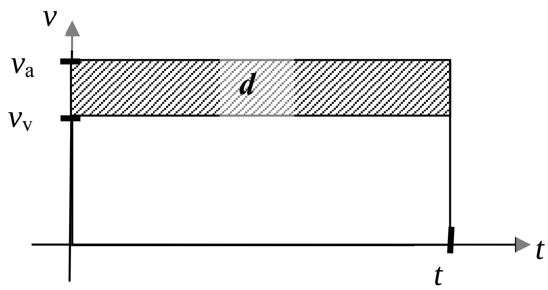
c) $|\mathbf{v}_{átl}| = \left|\frac{\Delta\mathbf{r}}{t_{össz}}\right| = \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{t_{össz}} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{t_{össz}} = \frac{\sqrt{(0{,}4\text{ km})^2 + (0{,}3\text{ km})^2}}{0{,}3\text{ h}} = \frac{0{,}5\text{ km}}{0{,}3\text{ h}} = \frac{5}{3}\frac{\text{km}}{\text{h}} = \underline{\underline{0{,}463\text{ m/s}}}.$

5 pont

3. $d = 2{,}4\text{ km}$
$v_a = 64{,}8\text{ km/h}$
$v_v = 15\text{ m/s} = 54\text{ km/h}$

---

a) $t = ?$
b) $s_a = ?$



a) Mind az autó, mind a vonat azonos ideig halad, de az autónak 2,4 km-rel több utat kell megtennie, hogy a vonatot utolérje. Így

$$v_a \cdot t = v_v \cdot t + d,$$

$$t = \frac{d}{v_a - v_v} = \frac{2{,}4\,\text{km}}{64{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}} - 54\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}22\ \text{h} = \underline{\underline{800\ \text{s}}}.$$ *10 pont*

b) Az autó által befutott út:

$$s_a = v_a \cdot t = 64{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0{,}22\ \text{h} = 14{,}4\ \text{km}$$ *5 pont*

(A vonat által megtett út: $s_v = v_v \cdot t = 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 800\ \text{s} = 12\,000\ \text{m} = 12\ \text{km}$)

4. $v_0 = 72$ km/h $= 20$ m/s

$s = 1{,}8$ km $= 1800$ m

a) $t = t' \rightarrow |a| = ?$

$s' = \frac{s}{2}$

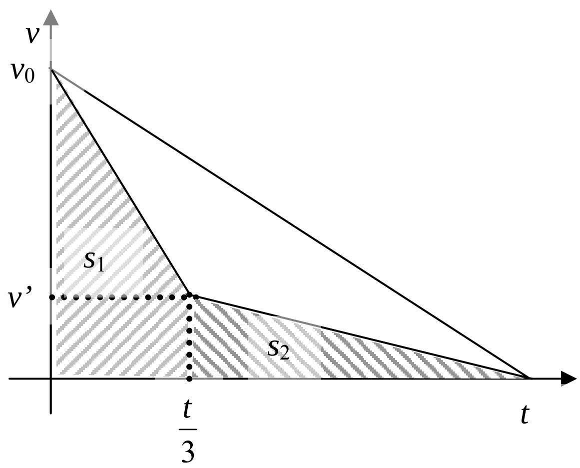
b) $\frac{t'}{3} \rightarrow |a_1| = ?$ $\quad \frac{2t'}{3} \rightarrow |a_2| = ?$

c) $s_1 = ?$

$s_2 = ?$

$t_1 = \frac{t'}{3} = ?$

$t_2 = \frac{2t'}{3} = ?$



a) $$s = \frac{v_0 t}{2} \rightarrow t = \frac{2s}{v_0} = \frac{2 \cdot 1800\,\text{m}}{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 180\ \text{s}.$$ *1 pont*

$$|a| = \left|\frac{0 - v_0}{t}\right| = \left|\frac{-20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{180\,\text{s}}\right| = \underline{\underline{\frac{1}{9}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$ *3 pont*

b) $$s' = \frac{s}{2} = \frac{v_0 + v'}{2}\,\frac{t}{3} + \frac{v'\,\frac{2t}{3}}{2}$$

$$900\ \text{m} = \frac{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + v'}{2} \cdot 60\,\text{s} + v' \cdot 60\,\text{s}$$

$$30\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 3v'$$

$$v' = \frac{10}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$ *3 pont*

$$|a_1| = \left|\frac{v' - v_0}{\frac{t}{3}}\right| = \left|\frac{\frac{10}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}} - 20\frac{\text{m}}{\text{s}}}{60\ \text{s}}\right| = \frac{5}{18}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$ *1 pont*

$$|a_2| = \left|\frac{0 - v'}{\frac{2t}{3}}\right| = \left|\frac{-\frac{10}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}}{120\ \text{s}}\right| = \underline{\underline{\frac{1}{36}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$ *1 pont*

c) $s_1 = \frac{v_0 + v'}{2}\frac{t}{3} = \frac{20\frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{10}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 60\ \text{s} = \underline{\underline{700\ \text{m}}}$ *2 pont*

$s_2 = \frac{v'}{2}\frac{2t}{3} = \frac{\frac{10}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 120\ \text{s} = \underline{\underline{200\ \text{m}}}$ *2 pont*

$t_1 = \frac{t'}{3} = \frac{180\,\text{s}}{3} = \underline{\underline{60\ \text{s}}}$, *1 pont* $t_2 = \frac{2t'}{3} = \underline{\underline{120\ \text{s}}}$ *1 pont*

5. m = 60 kg
h = 800 m
v = 5 m/s

---

a) $x = (E_0 - E_{vég})/E_0 = ?$
b) $v_{kő} = ?$ nincs közegellenállás

a) Elhanyagoljuk a repülőgép vízszintes sebességét, és csak a függőleges sebességváltozást tekintjük.

A kiugráskor $E_0 = mgh = 60\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 800\ \text{m} = 48 \cdot 10^4\ \text{J}$.

Földet éréskor $E_{vég} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{60\,\text{kg} \cdot 25\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2} = 750\ \text{J}$.

$$x = \frac{E_0 - E_{vég}}{E_0} = \frac{48 \cdot 10^4 - 750}{48 \cdot 10^4} = \underline{\underline{99{,}8\ \%}}$$ *10 pont*

b) Ha elhanyagoljuk a közegellenállást, nincs energiaveszteség: $E_0 = E_{vég}$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 500\,\text{m}} = \underline{\underline{126{,}5\ \text{m/s}}}$$ *5 pont*

6. m = 1,85 kg
W = 10 J
v = 12 m/s
M = 0,45 kg

---

a) Eltörik-e?
b) $N = ?$

a) Mivel az ütközés rugalmatlan, a karatéző ökle és a cserép darabjai azonos sebességgel mozognak tovább:

$$Mv = (M + m)\,u \quad \rightarrow u = \frac{M}{M+m}u = \frac{0{,}45\,\text{kg}}{0{,}45\,\text{kg} + 1{,}85\,\text{kg}} \cdot 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 2{,}35 \text{ m/s.}$$ *6 pont*

A cserép eltörésére fordított energia a rendszer kezdeti és ütközés utáni mozgási energiájának különbsége

$$\Delta W = \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}(m+M)u^2 = \frac{1}{2}(0{,}45\cdot 12^2 - 2{,}3\cdot 2{,}35^2)\ \text{J} = \underline{\underline{26{,}05\ \text{J.}}}$$ *6 pont*

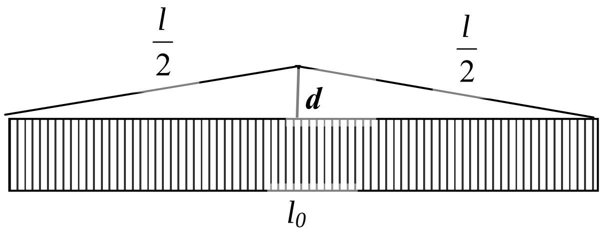
Mivel $\Delta W > W$, a cserép eltörhető.

b) $N = \dfrac{\Delta W}{W} = \dfrac{26{,}05}{10} = 2{,}6$, azaz kb <u>2 darab</u> cserép törhető össze. *3 pont*

Megjegyzés: ha nem vesszük figyelembe, hogy a rugalmatlan ütközésnél a testek mozognak is, $\Delta W = \frac{1}{2}Mv^2 = 32{,}4$ J adódik, ami 3 cserép töréséhez lenne elég, de ez így hibás gondolatmenet.

7. $l_0 = 25$ m
$\Delta t = 40$ °C
$\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}\ \text{K}^{-1}$

$d = ?$



$$l = l_0(1 + \alpha\,\Delta t) = 25\ \text{m}\,(1 + 1{,}2\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{°\text{C}}\cdot 40\ °\text{C}) = 25{,}012\ \text{m},$$ *10 pont*

$$d = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{25{,}012\,\text{m}}{2}\right)^2 - \left(\frac{25\,\text{m}}{2}\right)^2} = 0{,}38\ \text{m} = \underline{\underline{38\ \text{cm.}}}$$ *5 pont*

8. $m = 10$ kg
$v_0 = 108\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$m_1 = 2$ kg
$v_1 = 150\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \rightarrow É$
$m_2 = 4$ kg
$v_2 = 125\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \rightarrow D$
$m_3 = 1$ kg
$v_2 = 200\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \rightarrow K$

---

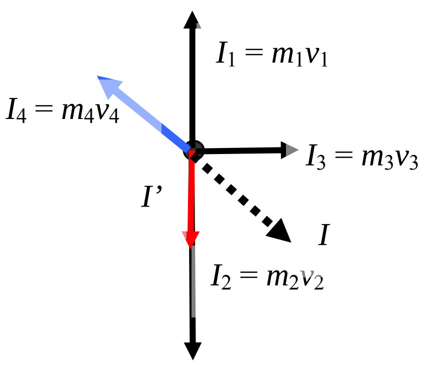
a) $h = ?$
b) $v_4 = ?$ irány?
c) $E_{gáz} = ?$
$g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

a) Az energiamegmaradás törvénye alapján fennáll, hogy

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh,$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(30\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{45{,}87\ \text{m.}}}$$ *3 pont*

b) A lendületváltozások elhelyezkedése



A lendületvektorok nagyságai:

$I_1 = m_1v_1 = 2\text{ kg}\cdot 150\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 300\text{ kg}\frac{\text{km}}{\text{h}}$, *1 pont*

$I_2 = m_2v_2 = 4\text{ kg}\cdot 125\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 500\text{ kg}\frac{\text{km}}{\text{h}}$, *1 pont*

$I_3 = m_3v_3 = 1\text{ kg}\cdot 200\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 200\text{ kg}\frac{\text{km}}{\text{h}}$. *1 pont*

I_1 és I_2 ellentétesek, eredőjük nagysága (lásd a rajzot): $I' = I_2 - I_1 = 200\text{ kg}\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

2 pont

I' és I_3 merőlegesek egymásra, eredőjük nagysága:

$I = \sqrt{(I')^2 + (m_3v_3)^2} = \sqrt{2}\ m_3v_3 = 200\sqrt{3}\ \text{kg}\frac{\text{km}}{\text{h}}$. *2 pont*

A negyedik rész sebessége:

$v_4 = \dfrac{I}{m_4} = \dfrac{I}{m-(m_1+m_2+m_3)} = \dfrac{200\sqrt{3}\,\text{kg}\frac{\text{km}}{\text{h}}}{3\,\text{kg}} = 115{,}47\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. *1 pont*

A negyedik rész sebességének iránya pontosan északnyugati.

c) A lövedék sebessége a pálya legmagasabb pontján zérus, mozgási energiája is zérus. A repeszek mozgási energiáját a lőporgázok (kémiai) energiája fedezi. Így

$$E_{gáz} = \frac{1}{2}\left(m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + m_3v_3^2 + m_4v_4^2\right) = \frac{1}{2}\left[2\,\text{kg}\cdot\left(\frac{150}{3{,}6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 4\,\text{kg}\cdot\left(\frac{200}{3{,}6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 1\,\text{kg}\cdot\left(\frac{200}{3{,}6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 3\,\text{kg}\cdot\left(\frac{115{,}47}{3{,}6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\right] = \underline{\underline{7233{,}8\ \text{J}}}$$ *4 pont*

9. $T_1 = 250$ K hélium, $f_1 = 3$, n_1, p, V
$T_2 = 310$ K oxigén, $f_2 = 5$, n_2, p, V

a) $T = ?$

b) $\dfrac{p'}{p} = ?$

a) A fal eltávolítása előtt:

$pV = n_1 RT_1$

$pV = n_2 RT_2 \qquad \rightarrow n_2 T_2 = n_1 T_1$

Mivel a rendszer zárt, a rendszer belső energiája megmarad:

$\frac{3}{2}n_1RT_1 + \frac{5}{2}n_2RT_2 = \frac{3}{2}n_1RT + \frac{5}{2}n_2RT$

$3\,n_1\,T_1 + 5\,n_2\,T_2 = (3\,n_1 + 5\,n_2)T$

$T = \dfrac{8T_1T_2}{3T_2 + 5T_1} = \dfrac{8\cdot 250\cdot 310}{3\cdot 310 + 5\cdot 250}\ \text{K} = \underline{\underline{284{,}4\ \text{K}}}$. *9 pont*

b) A végállapotban az állapotegyenlet

$p'2V = (n_1 + n_2)RT = (n_1 + n_1\frac{T_1}{T_2})RT$

$pV = n_1RT_1$

A két egyenletet elosztva egymással:

$$\frac{p'}{p} = \frac{1+\frac{T_1}{T_2}}{2T_1}T = \frac{T}{2}\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right) = \underline{\underline{1{,}027}}.$$ 6 pont

10. $E = 800\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$

$AB = AC = BC = 1$ cm

$d = 3$ cm $= 3\cdot 10^{-2}$ m

---

a) $U = ?$

b) $U_A = ?$

$U_B = ?$

$U_C = ?$

c) $W = ?$

a) $U = E\,d = 800\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\cdot 3\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} = \underline{\underline{24\ \mathrm{V.}}}$ 3 pont

b) Vegyük a pozitív töltésű fegyverzet potenciálját zérusnak. Ekkor

$U_A = U_C = E\cdot y = E\cdot(d' - AB\frac{\sqrt{3}}{2})$ és $d = d' - 1$ cm,

$U_A = U_C = 800\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\ (2\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} - 10^{-2}\ \mathrm{m}\frac{\sqrt{3}}{2}) = 9{,}071$ V.

3 pont

$U_B = U - E\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} = 24\ \mathrm{V} - 800\cdot 10^{-2}\ \mathrm{V} = \underline{\underline{16\ \mathrm{V.}}}$ 2 pont

Megjegyzés: Ha a negatív töltésű fegyverzet potenciálja zérus, akkor

$U_B = \underline{\underline{8\ \mathrm{V}}}$ (3 pont)

$U_A = U_C = \underline{\underline{14{,}93\ \mathrm{V}}}$ (2 pont)

c) Mivel a konzervatív mezőben végzett munka független az út alakjától, így

$W_{AC} = W_{ABC} = F\cdot s\cdot \cos 90° = E\cdot Q\cdot AC\cdot \cos 90° = 0.$ 7 pont

11. $Q = 9$ Ah

$I_= = 2{,}25$ A

$I_0 = 2$ A

$T = 0{,}15$ s

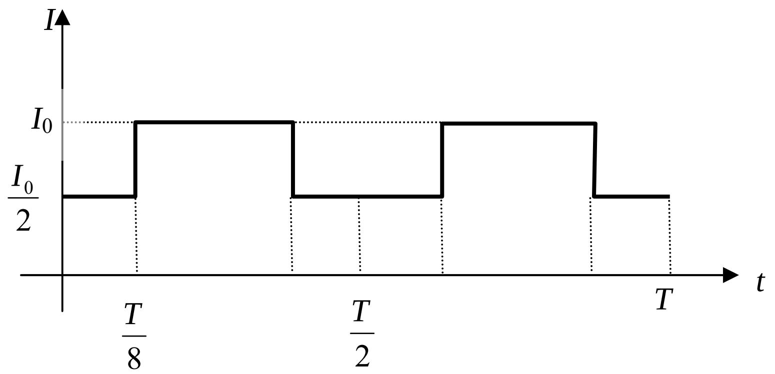
---

a) $t_1 = ?$ egyenirányítás nélkül

b) $t_2 = ?$ kétutas egyenirányítással

a) Mivel a pozitív illetve a negatív félperiódus szimmetrikus, emiatt ezzel a váltakozó árammal az akkumulátort feltölteni nem lehet ($t_1 = \infty$). 4 pont

b) Az egyenirányítás után az áram grafikonja:



A periódusidő alatt beszállított töltés nagysága:

$$Q' = \frac{I_0}{2}\cdot\frac{T}{8}\cdot 4 + I_0\cdot 2\frac{T}{8}\cdot 2 = \frac{I_0T}{4} + \frac{I_0T}{2} = I_0T\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = I_0T\frac{3}{4} =$$

$$= 2\text{ A}\cdot 0{,}15\text{ s}\cdot\frac{3}{4} = 0{,}225\text{ As} = \frac{0{,}225}{3600}\text{ Ah}.$$ *6 pont*

$$x = \frac{Q}{Q'} = \frac{9\text{ Ah}}{\frac{0{,}225}{3600}\text{Ah}} = 144\,000 \qquad t_2 = Tx = 21\,600\text{ s} = \underline{\underline{6\text{ h}}}.$$ *2 pont*

A töltési idő egyenáramnál

$$t' = \frac{Q}{I_=} = \frac{9\text{ Ah}}{2{,}25\text{ A}} = 4\text{ h}.$$ *2 pont*

Így egyenirányított váltakozó áram esetén

$\frac{t_2}{t'} = \frac{6\text{ h}}{4\text{ h}} = 1{,}5$ -ször hosszabb időre van szükség a feltöltéshez. *1 pont*

12. $a = 0{,}4g$, $g = 9{,}81\text{ m/s}^2$
$f = 0{,}3$ Hz

$A = ?$

$\omega = 2\pi f$

$a = a_{max} = A\omega^2$

$$A = \frac{a}{\omega^2} = \frac{0{,}4g}{4\pi^2 f^2} = \frac{0{,}4\cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4\pi^2\cdot 0{,}3^2\frac{1}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{1{,}1\text{ m}}}$$ *15 pont*

13. $d = 1$ cm
$N = 25$
$E = 182$ V/cm
$U_{max} = 182$ V
$\omega = 100$ Hz
$Q_e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C
$m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg
$g = 9{,}81\text{ m/s}^2$

---

a) $x = \frac{m_{csepp}}{m_e} = ?$

b) $A = ?$

a) A lebegés feltétele:

$m_{csepp}\cdot g = E\,Q_{csepp} = E\,N\,Q_e$

$$x = \frac{m_{csepp}}{m_e} = \frac{ENQ_e}{g\cdot m_e} = \frac{182\cdot 10^2\frac{\text{V}}{\text{m}}\cdot 25\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\text{ C}}{9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\text{ kg}} = \underline{\underline{8{,}15\cdot 10^{15}}}$$

6 pont

b) Ha a lemezekre váltakozó feszültséget is kapcsolunk, a cseppre ható erők eredője:

$$\Sigma F = E'\,N\,Q_e = \frac{U}{d}\,N\,Q_e = \frac{U_{max}\sin\omega t\cdot N\cdot Q_e}{d}.$$

Másrészt

$$\Sigma F = m_{csepp}\,a = m_{csepp}\,A\omega^2\sin\omega t \quad \textit{és így}$$

$$\frac{U_{max}\sin\omega t\cdot N\cdot Q_e}{d} = m_{csepp}\,A\omega^2\sin\omega t.$$

$$A=\frac{U_{\max}N\cdot Q_e}{m_{\text{csepp}}\omega^2 d}=\frac{U_{\max}N\cdot Q_e}{xm_e\omega^2 d}=\frac{182\,\text{V}\cdot 25\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\text{C}}{8{,}15\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,\text{kg}\cdot(100\,\text{Hz})^2\cdot 0{,}01\,\text{m}}\approx 10^{-3}\ \text{m}=\underline{\underline{1\ \text{mm}}}.$$

9 pont

14. $d_1=\dfrac{d_2}{3}$

$\dfrac{1}{f}=2\dfrac{1}{\text{m}}\rightarrow f=0{,}5\ \text{m}$

$s_2 = 1{,}75$ m

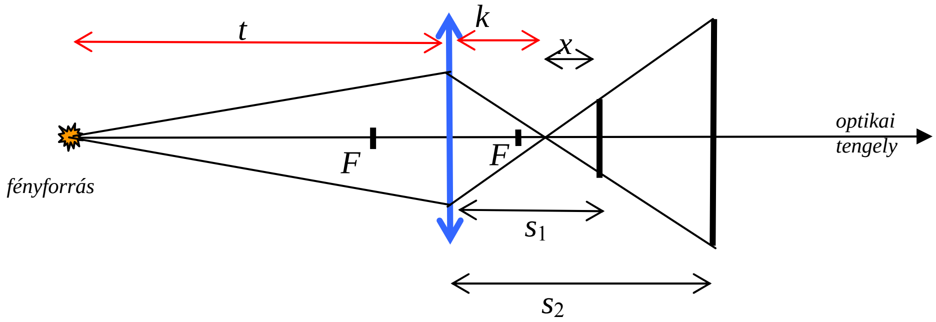
$s_1 = 1$ m

---

a) $t = ?$

b) $K = ?$

$T = 10$ cm



a) Az ábra alapján

$$x=\frac{s_2-s_1+x}{3}\rightarrow x=\frac{s_2-s_1}{2}=\frac{1{,}75\,\text{m}-1\,\text{m}}{2}=\underline{\underline{0{,}375\ \text{m}}}$$

$k = s_1 - x = 0{,}625$ m *6 pont*

A leképezési törvény alapján

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}\qquad t=\frac{kf}{k-f}=\frac{0{,}625\cdot 0{,}5}{0{,}625-0{,}5}\ \text{m}=\underline{\underline{2{,}5\ \text{m}}}.$$

6 pont

b) $N=\dfrac{k}{t}=\dfrac{0{,}625\,\text{m}}{2{,}5\,\text{m}}=0{,}25$

$K = N\cdot T = 10\ \text{cm}\cdot 0{,}25 = \underline{\underline{2{,}5\ \text{cm}}}$. *3 pont*