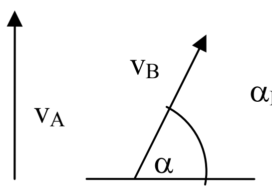
1. $v_A = 0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$v_B = 0{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

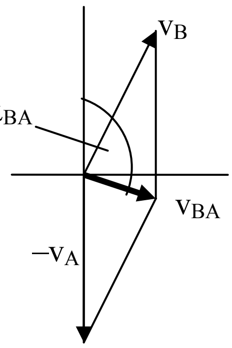
$\alpha = 60°$

a) $v_{BA} = ?$ $\alpha_{BA} =$

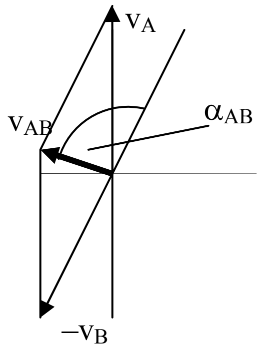
b) $v_{AB} = ?$ $\alpha_{AB} =$



A Földről nézve a sebességek



a) Az *A* hőlég-ballonból nézve *B* mozgása



b) A *B* hőlégballonból nézve *A* mozgása

a) A relatív sebesség

vízszintes komponense $v_x = v_B \cdot \cos\alpha = 0{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 60° = 0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. *3 pont*

A relatív sebesség függőleges komponense

$$v_y = v_B \cdot \sin\alpha - v_A = 0{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 60° - 0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = -0{,}154\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$ *4 pont*

$$v_{BA} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(0{,}2)^2 + (0{,}154)^2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{0{,}25\ \text{m/s}}}.$$ *1 pont*

$$(\alpha_{BA} = 90° + \operatorname{arctg}\left|\frac{v_y}{v_x}\right| = 90° + \operatorname{arctg} 0{,}77 = 90° + 37{,}6° = \underline{\underline{127{,}6°}})$$

b) Az ábrából, illetve a szerkesztésből látszik, hogy a relatív sebességvektor az a) beli relatív sebességvektor (–1)-szerese. *3 pont*

c) Azaz $v_x = -0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_y = 0{,}154\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. *3 pont*

Ez a tény az inerciarendszerek egyenértékűségének következménye.

d) Tehát $v_{AB} = 0{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. *1 pont*

(Irány a v_B irányával $\alpha_{AB} = 180° - (\alpha + \operatorname{arctg}\left|\frac{v_y}{v_x}\right|) = 120° - 37{,}6° = \underline{\underline{82{,}4°}}$ -t zár be).

Megjegyzés: A szögfüggvények helyett a szabályos háromszögre vonatkozó ismeretek használhatók.

2. $\Delta t = 50$ min

$\Delta s = 2$ km

$t_l = 1$ h 40 min = 100 min

a) $d = ?$

b) $v_l = ?$

c) $v_{gy} = ?$

d) $t \rightarrow s$

a) Az időadatokból látszik, hogy amikor a lovas már újból a faluban van, akkor ér a gyalogos éppen avárosba. Ez azt jelenti, hogy a lovas v_l sebessége éppen kétszerese a gyalogos v_{gy} sebességének, azaz

$$v_l = 2\, v_{gy}.$$ *3 pont*

A lovas és a gyalogos találkozása után *t'* idő elteltével a gyalogos a városba, a lovas a faluba ér, így fennáll

$$\Delta s = t'\, v_{gy} \qquad \text{és} \qquad d - \Delta s = t'\, v_l.$$

A két összefüggésből

$d - \Delta s = \dfrac{\Delta s}{v_{gy}} \cdot v_l$, azaz

$d - \Delta s = \dfrac{\Delta s}{v_{gy}} \cdot 2v_{gy}$, amiből a falu és a város d távolsága: $d = 3\Delta s = \underline{\underline{6\ \text{km}}}$. *3 pont*

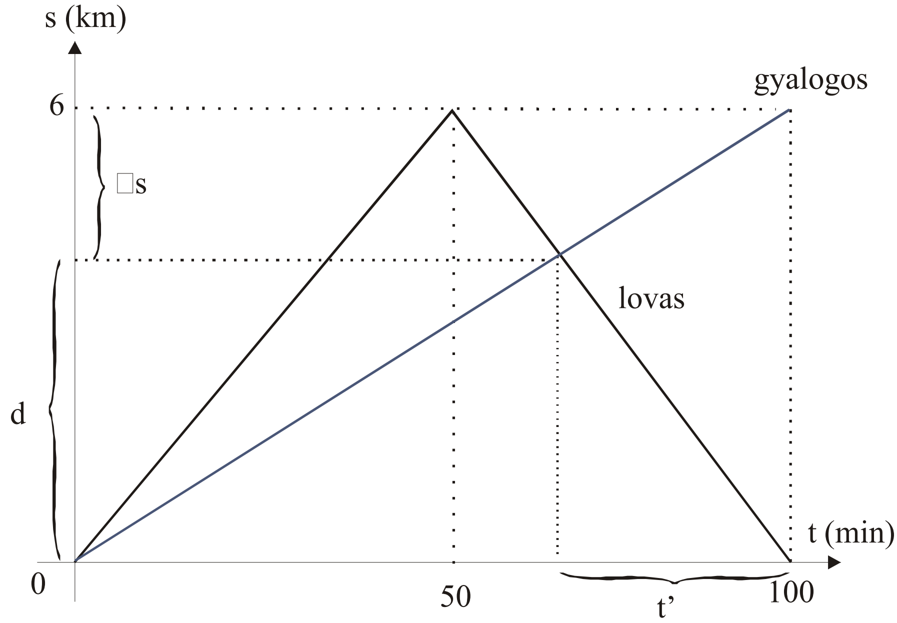
b) A lovas sebessége, miután $2d$ utat t_l idő alatt tett meg:

$$v_l = \frac{2d}{t_l} = \frac{2 \cdot 6\,\text{km}}{100\,\text{min}} = \frac{12\,\text{km}}{\frac{100}{60}\,\text{h}} = \underline{\underline{7{,}2\ \text{km/h}}}.$$ *3 pont*

A gyalogos sebessége:

$$v_{gy} = \frac{v_l}{2} = \underline{\underline{3{,}6\ \text{km/h}}}.$$ *2 pont*

e) Az elmozdulás-idő grafikon:



4 pont

3. $s = 400$ m

$\Delta t_1 = 5$ min $= 300$ s

$\Delta t_2 = \dfrac{100}{3}$ s

a) $v_1 = ?$

$v_2 = ?$

$T_1 = ?$

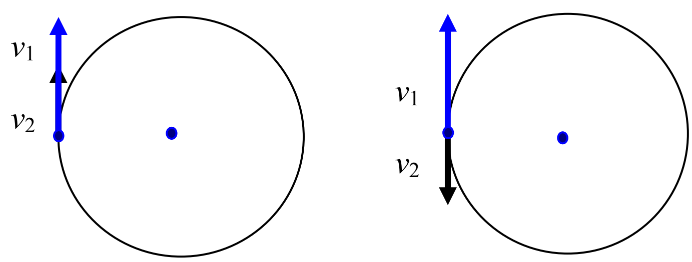
$T_2 = ?$

b) $s_1 = ?$

$s_2 = ?$

$t_ö = 30$ min $= 1800$ s

a)



A gyorsabb futó a találkozásig $\Delta s_1 = v_1 \cdot \Delta t_1$, a lassabb futó $\Delta s_2 = v_2 \cdot \Delta t_1$ utat fut be. A gyorsabb futó éppen egy körrel többet teljesít, amikor egy irányban futnak: $\Delta s_1 = \Delta s_2 + s$. Így

$$v_1\, \Delta t_1 = v_2\, \Delta t_1 + s\text{, azaz } \frac{s}{\Delta t_1} = v_1 - v_2.$$ *3 pont*

Ha ellentétes irányban futnak, akkor a találkozásig megtett útjaik összege éppen egy teljes kör: $\Delta s_1' + \Delta s_2' = s$. Mivel $\Delta s_1' = v_1 \cdot \Delta t_2$ és $\Delta s_2' = v_2 \cdot \Delta t_2$, fennáll, hogy

$$v_1\,\Delta t_2 + v_2\,\Delta t_2 = s, \text{ azaz } \frac{s}{\Delta t_2} = v_1 + v_2 .$$ 3 pont

Mindezek alapján:

$$\frac{s}{\Delta t_1} + \frac{s}{\Delta t_2} = 2v_1 \text{, ahonnan}$$

$$v_1 = \frac{\frac{s}{\Delta t_1} + \frac{s}{\Delta t_2}}{2} = \frac{400\,\text{m}\left(\frac{1}{300\text{ s}} + \frac{3}{100\text{ s}}\right)}{2} = 200\text{ m}\cdot\frac{10}{300\text{ s}} = \frac{20}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{24\text{ km/h.}}}$$ 1 pont

$$v_2 = \frac{\frac{s}{\Delta t_2} - \frac{s}{\Delta t_1}}{2} = \frac{400\,\text{m}\left(\frac{3}{100\text{ s}} - \frac{1}{300\text{ s}}\right)}{2} = 200\,\text{m}\cdot\frac{8}{300\text{s}} = \frac{16}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{19{,}2\text{ km/h}}}.$$ 1 pont

A köridők:

$$T_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{400\,\text{m}}{\frac{20}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \underline{\underline{60\text{ s}}},$$ 1 pont

$$T_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{400\,\text{m}}{\frac{16}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \underline{\underline{75\text{ s}}}.$$ 1 pont

b) A megtett utak:

$$s_1 = v_1\,t_ö = \frac{20}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 1800\text{ s} = \underline{\underline{12\,000\text{ m}}},$$ 3 pont

$$s_2 = v_2\,t_ö = \frac{16}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 1800\text{ s} = \underline{\underline{9\,600\text{ m}}}.$$ 2 pont

(A 30 percnyi idő alatt – egy irányban futva – 6-szor tudtak a futók találkozni, így a lassabban futó 6 körrel, azaz 6·400 m = 2400 m-rel kevesebb utat tett meg.)

4. $\mu = 0{,}01$
$M = 86$ kg
$m = 50$ g
$v_g = 600\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

a) $s = ?$
b) $\alpha = ?$, ha $s' = \frac{s}{2}$

a) A síző lövés utáni u sebességére a lendület-megmaradás törvényéből következtethetünk:

$m\,v = (M - m)\,u$, azaz a lövész hátrasiklási sebessége:

$$u = \frac{mv}{M-m} = \frac{50\cdot10^{-3}\text{ kg}\cdot 600\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{86\text{ kg} - 50\cdot10^{-3}\text{ kg}} = 0{,}349\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}35\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A megtett út 4 pont

$$s = u\cdot t - \frac{a}{2}t^2 \text{, a lassulás pedig}$$

$$a = \frac{\sum F}{M-m} = \frac{F_s}{M-m} = \frac{\mu(M-m)g}{M-m} = \mu g.$$

A hátracsúszás ideje:

$$t = \frac{u}{a} = \frac{u}{\mu g}\text{, így } s = u\frac{u}{\mu g} - \frac{\mu g}{2}\left(\frac{u}{\mu g}\right)^2 = \frac{u^2}{2\mu g}\text{, azaz}$$

$$s = \frac{\left(0{,}349\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0{,}01 \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{0{,}621\ \text{m}}}.$$ $\boxed{5\ pont}$

b) Mivel $s' = \frac{s}{2}$, így a lövész hátrafelé csúszásának sebességére fennáll, hogy

$$s' = \frac{(u')^2}{2\mu g} = \frac{s}{2},\ \text{amiből}\ (u')^2 = s \cdot \mu g = \frac{u^2}{2},\ \text{azaz}\ u' = \pm\frac{u}{\sqrt{2}}.$$ $\boxed{6\ pont}$

Ebből pedig az következik, hogy a puskát ± 45°-os szög alatt kell a sízőnek tartania.

Megjegyzés: A b) esetben a lövedék sebessége és így lendülete sem vízszintes, így a lövész a lövés leadásakor kap egy, a lövedék sebességégtől függő, függőlegesen lefelé vagy felfelé mutató lendületet. Ez a lövészre ható nyomóerőt növeli vagy csökkenti. Így a súrlódási erő értéke nem marad $F_s = \mu\,(M - m)\,g$ értékű. Ebből a hatástól most eltekintettünk.

5. $l = 1$ m
$M = 11$ kg
$m_1 = 1$ kg
$v_1 = 40\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

a) $h = ?$
b) $F = ?,\ F' = ?$

a) A robbanásra a lendületmegmaradás törvénye alkalmazható:

$$M \cdot 0 = m_1 v_1 + (M - m_1)u$$

A fonálon maradt rész indulási sebességének nagysága

$$u = \frac{|-m_1 v_1|}{M - m} = \frac{1\text{kg} \cdot 40\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10\text{kg}} = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}},\ \text{iránya vízszintes.}$$

Az emelkedés magasságára fennáll $\boxed{4\ pont}$

$$\frac{1}{2}(M - m)u^2 = (M - m)\,gh,\ \text{azaz}$$

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{\left(4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{0{,}816\ \text{m}}}.$$

b) A fonalat feszítő F erő a robbanás előtt megegyezik az M tömegű testre ható gravitációs erővel, azaz

$$F = Mg = 11\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{107{,}91\ \text{N}}}.$$ $\boxed{2\ pont}$

A robbanás után a fonálon maradt rész sebessége miatt (a rész körmozgásba kezd) a dinamika alapegyenlete alapján

$$F' - (M - m)g = (M - m)\frac{u^2}{l},\ \text{azaz a fonálerő}$$

$$F' = (M - m)\left[\frac{u^2}{l} + g\right] = 10\ \text{kg}\left(\frac{\left(4\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1\text{m}} + 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = \underline{\underline{258{,}1\ \text{N}}}.$$ $\boxed{6\ pont}$

6. $\mu = 0$
$m_1 = 0{,}1$ kg
$v_1 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$m_2 = 0{,}4$ kg
$D = 5000\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$
$l_0 = 5$ cm

a) $u_1 = ?$, $u_2 = ?$
b) $u_1' = ?$, $u_2' = ?$, ha d minimális
c) $d_{\min} = ?$

a) A rugó miatt a testek rugalmasan ütköznek. Így a lendületmegmaradás és a mozgási energia megmaradásának tételét alkalmazhatjuk:

$m_1\,v_1 + m_2{\cdot}0 = m_1\,u_1 + m_2{\cdot}u_2$,

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_1 0^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 .$$ *2 pont*

Adatokkal:

$$0{,}1\ \text{kg}\cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}1\ \text{kg}\cdot u_1 + 0{,}4\ \text{kg}\cdot u_2,$$

ahonnan

$$u_1 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 4\,u_2\ ,$$

és $0{,}1\ \text{kg}\cdot\ 100\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 0{,}1\ \text{kg}\ (u_1)^2 + 0{,}4\ \text{kg}\ (u_2)^2$, így

$100\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = (10\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 4\,u_2)^2 + 4\,(u_2)^2$. Ebből

$-80\,u_2 + 20\,(u_2)^2 = 0$

$u_2 = \underline{\underline{4\ \text{m/s}}}$ (az m_1 eredeti haladási irányában),

$u_1 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 4\cdot 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{-6\ \text{m/s}}}$ (visszafelé halad). *3 pont*

b) Az ütközés során a rugó az m_1 tömegű testet fékezi, a másikat pedig gyorsítja. A rugó akkor a legrövidebb, amikor a testek sebessége megegyezik, ugyanis ezt megelőzően az m_1 tömegű test még közeledik, azután pedig az m_2 tömegű test már távolodik. Tehát

$m_1\,v_1 + m_2{\cdot}0 = m_1\,u_1' + m_2{\cdot}u_2'$, de $u_1' = u_2' = u$.

Így

$$u = u_1' = u_2' = \frac{m_1v_1}{m_1+m_2} = \frac{0{,}1\,\text{kg}\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}1\,\text{kg}+0{,}4\,\text{kg}} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$ *5 pont*

c) Amikor a testek a legjobban megközelítik egymást, akkor lesz távolságuk a legkisebb. Az energiamegmaradás törvénye alapján

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_1 0^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2 + \frac{1}{2}Dx^2 ,$$

ahol x a rugó összenyomódása. Innen

$$x = \sqrt{\frac{m_1v_1^2 - (m_1+m_2)u^2}{D}} = \sqrt{\frac{0{,}1\,\text{kg}\cdot\left(10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 0{,}5\,\text{kg}\cdot\left(2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{5000\,\frac{\text{N}}{\text{m}}}} = 0{,}04\ \text{m} = 4\ \text{cm}.$$

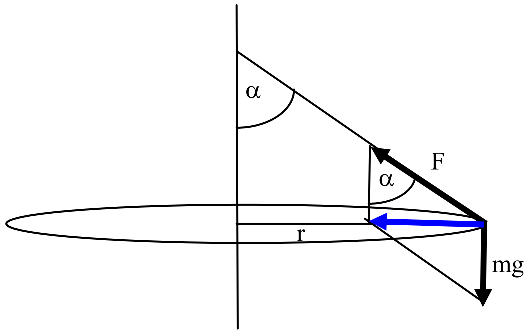
A testek legkisebb távolsága:

$d_{\min} = l_0 - x = 5\ \text{cm} - 4\ \text{cm} = \underline{\underline{1\ \text{cm}}}$. *5 pont*

7. $l = 12$ m
$\alpha = 65°$
$m = 220$ kg
$g = 9{,}81\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

a) $F = ?$
b) $v = ?$

a)



a) A körhinta széke vízszintes, $r=l{\cdot}\sin\alpha$ sugarú körpályán mozog. Az ábra alapján:

$$F = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{220\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\cos 65°} = \underline{\underline{5107\ \text{N}}}\ .$$ 5 pont

b) A körpályán tartó centripetális erő $m\dfrac{v^2}{r} = mg\,\text{tg}\,\alpha$. Ebből

$$v^2 = g\,r\,\text{tg}\alpha = g\,l\,\sin\alpha\cdot\text{tg}\,\alpha = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 12\ \text{m}\cdot\sin 65°\cdot\text{tg}\,65° = 228{,}8\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2},$$

$v = \underline{\underline{15{,}13\ \text{m/s}}} = 54{,}5$ km/h. 10 pont

8. $T_A = 400\ \text{K} = T_C$
$T_B = 800\ \text{K} = 2T_A$
$T_D = 200\ \text{K} = \dfrac{T_A}{2}$
$n = 1$ mól
$f = 3$

$\Delta E,\ Q,\ W = ?$

A megadott diagram segítségével kiszámítjuk az állapothatározók értékét az egyes állapotokban:

$D \rightarrow A$ izochor folyamat:

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_D}{T_D} = \frac{p_A}{T_A} = \frac{p_D}{T_A}\cdot 2 \ \Rightarrow\ p_D = \frac{p_A}{2},$$ 1 pont

$C \rightarrow D$ izobar folyamat, tehát $p_C = p_D$, 1 pont

$A \rightarrow B$ izobar folyamat:

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} = \frac{V_B}{2T_A} \quad \Rightarrow V_B = 2V_A\ ,$$ 1 pont

$B \rightarrow$ C izochor folyamat, tehát $V_C = V_B$. 1 pont

Az állapotjelzők összefoglaló táblázata az A állapot jellemzőivel kifejezve:

	p	V	T
A	p_A	V_A	400 K=T_A
B	p_A	2 V_A	800 K = 2 T_A
C	$\dfrac{p_A}{2}$	2 V_A	400 K = T_A
D	$\dfrac{p_A}{2}$	V_A	200 K = $\dfrac{T_A}{2}$

Az egyes folyamatokra kiszámítjuk a munkát, a belső energiaváltozást és az I. főtétel segítségével a felvett, vagy leadott hőt:

$A \rightarrow B$ $\quad W_{AB} = p_A\,(V_A - V_B) = -\,p_AV_A = -nRT_A = -1\ \text{mól}\cdot 8{,}31\ \dfrac{\text{J}}{\text{mól}\cdot\text{K}}\cdot 400\ \text{K} = -3324\ \text{J}.$

1 pont

$\Delta E_{AB} = \frac{3}{2} nR(T_B - T_A) = \frac{3}{2} nR\, T_A = 4986$ J. 1 pont

$Q_{AB} = \Delta E_{AB} - W_{AB} = \frac{3}{2} nR\, T_A - (-nRT_A) = \frac{5}{2} nR\, T_A = 8310$ J. 1 pont

$B \to C$ $W_{BC} = 0$ 1 pont

$\Delta E_{BC} = \frac{3}{2} nR(T_C - T_B) = -\frac{3}{2} nR\, T_A = -4986$ J. 1 pont

$Q_{BC} = \Delta E_{BC} - W_{BC} = -\frac{3}{2} nR\, T_A - 0 = -\frac{3}{2} nR\, T_A = -4986$ J. 1 pont

$C \to D$ $W_{CD} = p_D(V_C - V_D) = \frac{p_A}{2} V_A = \frac{1}{2} nRT_A = 1662$ J. 1 pont

$\Delta E_{CD} = \frac{3}{2} nR(T_D - T_C) = -\frac{3}{2} nR \frac{T_A}{2} = -\frac{3}{4} nR\, T_A = -2493$ J. 1 pont

$Q_{CD} = \Delta E_{CD} - W_{CD} = -\frac{3}{4} nR\, T_A - \frac{1}{2} nRT_A = -\frac{5}{4} nRT_A = -4155$ J. 1 pont

$D \to A$ $W_{DA} = 0$

$\Delta E_{DA} = \frac{3}{2} nR(T_A - T_D) = \frac{3}{2} nR \frac{T_A}{2} = \frac{3}{4} nR\, T_A = 2493$ J. 1 pont

$Q_{DA} = \Delta E_{DA} - W_{DA} = \frac{3}{4} nR\, T_A - 0 = \frac{3}{4} nR\, T_A = 2493$ J. 1 pont

Táblázatban összefoglalva:

	$\Delta E\ (nRT_A)$	$Q\ (nRT_A)$	$W\ (nRT_A)$
$A \to B$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	-1
$B \to C$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0
$C \to D$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$
$D \to A$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
Összesen a körfolyamatra:	0	felvett: $\frac{13}{4}$ leadott: $-\frac{11}{4}$	$-\frac{1}{2}$

9. $D = 10\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$

$m = 0{,}4$ kg

$\mu = 0$

$x_1 = 10$ cm

$v_1 = 0{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

a) $v_2 = ?$ $x_2 = 5$ cm

b) $P_2 = ?$

c) $P_{max} = ?$

a) A test harmonikus rezgőmozgást végez, így fennállnak a következő összefüggések:

$x = A \sin\omega t,$

$v = A\ \omega \cos\omega\, t,$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{10\frac{\text{N}}{\text{m}}}{0{,}4\ \text{kg}}} = 5\ \text{s}^{-1}$$

Ezek alapján

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 \sin^2 \omega t + A^2 \cos^2 \omega t = A^2, \quad (*)$$

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}\,.$$

Behelyettesítve x_1 és v_1 értékét, az amplitúdót meg lehet határozni:

$$A = \sqrt{(0{,}1\,\mathrm{m})^2 + \frac{\left(0{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{25\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}}} = 0{,}172\ \mathrm{m}.$$ $\boxed{\textit{2 pont}}$

A (*) összefüggésből kifejezzük v_2-t:

$$v_2 = \sqrt{\omega^2 (A^2 - x_2^2)} = \omega\sqrt{A^2 - x_2^2} = 5\,\frac{1}{s}\sqrt{(0{,}172\ \mathrm{m})^2 - (0{,}05\ \mathrm{m})^2} = 0{,}823\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$ $\boxed{\textit{2 pont}}$

b) A pillanatnyi teljesítmény 5 cm-es kitérésnél:

$$P_2 = F_2 v_2 = D x_2 \cdot v_2 = 10\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}05\ \mathrm{m} \cdot 0{,}823\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{0{,}412\ \mathrm{W}}}$$ $\boxed{\textit{3 pont}}$

c) A rugó teljesítménye az idő függvényében:

$$P(\mathrm{t}) = Fv = D\,x(\mathrm{t})\,v(t) = D(A \sin \omega t)\,(A\omega \cos \omega t) = D\,A^2\,\omega \sin \omega t \cdot \cos \omega t,$$

$$P(t) = \frac{1}{2}\,D\,A^2\,\omega \sin 2\omega t$$

P maximális, ha $\sin 2\omega t = 1$, tehát

$$P_{\max} = \frac{1}{2}\,D\,A^2\,\omega = \frac{1}{2}\,m\,\omega^3\,A^2,$$

$$P_{\max} = \frac{1}{2}\,10\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot (0{,}172\ \mathrm{m})^2 \cdot 5\ \frac{1}{\mathrm{s}} = \underline{\underline{0{,}74\ \mathrm{W}}}.$$ $\boxed{\textit{8 pont}}$

Megjegyzés: A keresett v_2 értéket és az amplitúdót az energiamegmaradás tételét felhasználva is megkaphatjuk:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} D x_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} D x_2^2 \quad \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{D}{m}(x_1^2 - x_2^2)}$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} D x_1^2 = \frac{1}{2} D A^2 \quad \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{D} v_1^2 + x_1^2}$$

10. $v = 12\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$t_1 = 0{,}6$ s egyirányban
$t_2 = 0{,}5$ s szemben
$x_1 = 10$ cm
$v_1 = 0{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

a) $c = ?$ $\quad c < v$
b) $\lambda = ?$

a) A hullámokkal egyirányban haladva 1 s alatt $\frac{1}{0{,}6} = \frac{5}{3}$ hullámheggyel találkozik, azaz az észlelt frekvencia

$$f_1 = \frac{5}{3}\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$$ $\boxed{\textit{4 pont}}$

Hasonlóan, a hullámmal szemben haladva az észlelt frekvencia eszerint: $f_2 = \frac{1}{0{,}5} = 2\frac{1}{\mathrm{s}}$ $\boxed{\textit{4 pont}}$

A hullám sebessége a sízőhöz képest, ha egyirányban haladnak $v - c$, amikor szemben haladnak $v + c$. Felhasználva, hogy a hullámhossz viszont nem változik:

$\lambda = \dfrac{v-c}{f_1} = \dfrac{v+c}{f_2}$. Ebből a hullám sebessége kifejezhető:

$$c = v\frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} = 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\ \frac{2-\frac{5}{3}}{2+\frac{5}{3}} = 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{11}\ = \underline{\underline{1{,}09\ \text{m/s}}}.$$ 2 pont

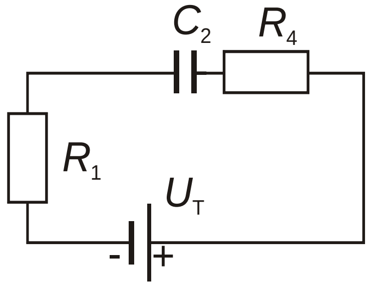
b) A hullámhossz $\lambda = \dfrac{v+c}{f_2} = \dfrac{12+1{,}09}{2}\text{m} = \underline{\underline{6{,}55\ \text{m.}}}$ 5 pont

11. $R_1 = 10\ \Omega$,
$R_2 = 12\ \Omega$,
$R_3 = 10\ \Omega$,
$R_4 = 8\ \Omega$,
$C_1 = 6\ \mu\text{F}$,
$C_2 = 2\ \mu\text{F}$,
$U_T = 24$ V

a) $P_i = ?$ $(i = 1,2,3,4)$
$W_i = ?$
K nyitott

b) $P_i = ?$ $(i = 1,2,3,4)$
$W_i = ?$
K zárt

a) A *K* kapcsoló nyitott állásában R_2 és R_3 végei közötti rövidzár miatt a kapcsolás egyszerűsödik:



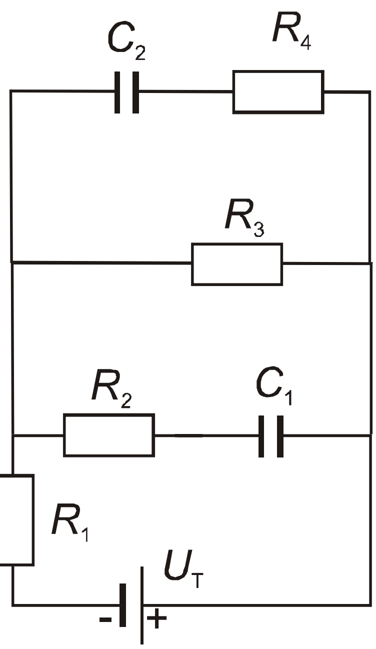
Így az ellenállásokon tartósan nem folyik áram, tehát

$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0.$ 2 pont

A C_2 kondenzátor $U_T = 24$ V-ra töltődik fel, a benne tárolt energia:

$W_2 = \dfrac{1}{2}C_2U_T^2 = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot10^{-6}\ \mu\text{F}\cdot(24\,\text{V})^2 = \underline{\underline{5{,}76\cdot10^{-4}\ \text{J}}}.$ 2 pont

A másik kondenzátor nem tárol energiát: $\underline{\underline{W_1 = 0}}$. 1 pont



b) A *K* kapcsoló zárt állásánál a kapcsolás átrajzolható:
R_2-n és R_4-en tartósan nem folyik áram, így

$P_2 = P_4 = 0.$ 2 pont

Az R_1 és R_3 ellenálláson átfolyó áram erőssége

$$I = \frac{U_T}{R_1 + R_3} = \frac{24\,\text{V}}{10\,\Omega + 10\,\Omega} = 1{,}2\ \text{A},$$ 2 pont

a teljesítmények

$P_1 = I^2R_1 = (1{,}2\ \text{A})^2\cdot 10\ \Omega = \underline{\underline{14{,}4\ \text{W}}}$, 1 pont
$P_3 = I^2R_3 = (1{,}2\ \text{A})^2\cdot 10\ \Omega = \underline{\underline{14{,}4\ \text{W}}}$. 1 pont

C_1-en eső feszültség

$U_{C_1} = U_T - IR_1 = 24\ \text{V} - 1{,}2\ \text{A}\cdot 10\ \Omega = 12\ \text{V}.$ 1 pont

A tárolt energia:

$W_1 = \dfrac{1}{2}C_1U_{C_1}^2 = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot10^{-6}\ \mu\text{F}\cdot(12\,\text{V})^2 = \underline{\underline{4{,}32\cdot10^{-4}\ \text{J}}}.$ 1 pont

C_2-en eső feszültség

$$U_{C_2} = U_T - IR_4 = 12\text{ V},$$ 1 pont

a tárolt energia:

$$W_2 = \frac{1}{2}C_2U_{C_2}^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^{-6}\,\mu\text{F}\cdot(12\,\text{V})^2 = \underline{\underline{1{,}44\cdot 10^{-4}\,\text{J}}}.$$ 1 pont

12. $\sigma = \frac{Q}{A} = 2\cdot 10^{-8}\ \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$

$m = 1$ g

$d = 20$ cm

$\alpha = 30°$

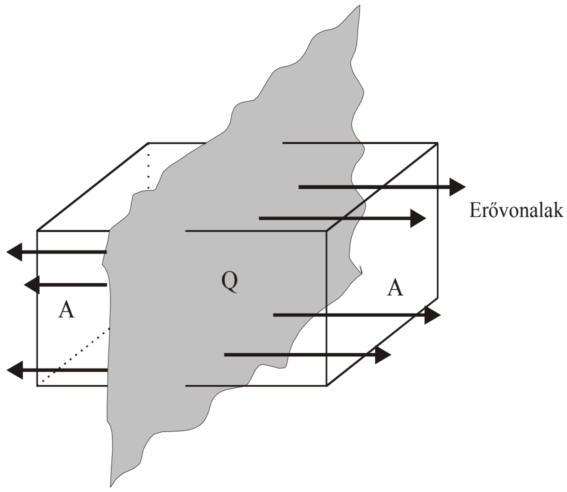
$g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$k = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$

a) $E = ?$

b) $Q' = ?$

a) A töltött fémlap körül kialakuló mező térerősségét a Gauss-törvény felhasználásával határozhatjuk meg.



Vegyük körbe a lemez egy kiszemelt részét olyan hasábbal, amelyik két, A felületű oldallapja merőleges az erővonalakra, másik két oldallapja és a két fedőlapja pedig párhuzamos az erővonalakkal.

A Q töltéssel rendelkező lapból kiinduló erővonalak száma $\frac{1}{\varepsilon_0}Q = 4\pi k\,Q$.

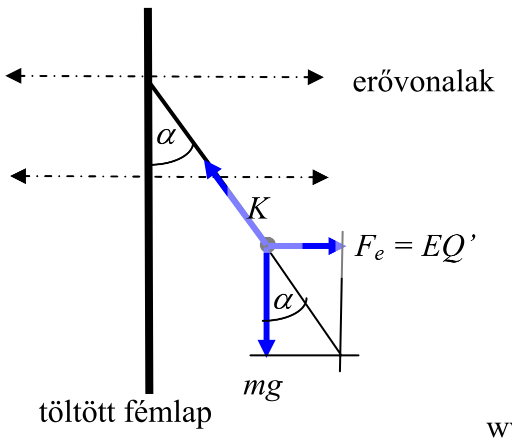
A térerősség, mivel az erővonalak mindkét fél-térrészben haladnak:

$$E = \frac{\frac{1}{\varepsilon_0}Q}{2\cdot A},\ \text{ahol}\ \frac{Q}{A} = \sigma\ \text{a felületi töltésűrűség.}$$

Így $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma\cdot 4\pi k}{2} = \sigma\,2\pi k$, azaz a (végtelenül) nagy kiterjedésű töltött fémlap körül kialakuló mező homogén, tehát a laptól mért <u>tetszőleges</u> x távolságban a térerősség értéke:

$$E = \sigma\,2\pi k = 2\cdot 10^{-8}\ \frac{\text{C}}{\text{m}^2}\cdot 2\pi\cdot 9\cdot 10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} = 1131\ \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$ 10 pont

b) A Q töltésű testre ható erőket az ábrán tüntettük fel:



(mivel E nagysága független a lemeztől mért távolságtól)

Az ábra alapján

$F_e = mg\ \text{tg}\ \alpha$

$EQ' = mg\ \text{tg}\ \alpha$

$$Q' = \frac{mg\,\text{tg}\alpha}{E} = \frac{10^{-3}\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\text{tg}\,30°}{1131\,\frac{\text{N}}{\text{C}}} = \underline{\underline{5\cdot 10^{-6}\ \text{C}}}$$ 5 pont

13. I = 4,7 A
B = 1,8 T
a = 2 m
α = 55°

a) M = ?
b) F_i = ?
c) F_e = ?

a) A keretre ható forgatónyomaték

$M = I\,A\,B\ \sin\varphi$,

ahol $A = \frac{1}{2}a{\cdot}a\ \text{tg}\ \alpha$ a keret területe, φ = 90°, a keret felületi normálisának és a B-nek a szöge. Így

$M = 4{,}7\ \text{A}\cdot\frac{1}{2}(2\ \text{m})^2\cdot\text{tg}\ 55°\cdot 1{,}8\ \text{T} = \underline{\underline{24{,}16\ \text{Nm}}}$. 5 pont

b) A keretre ható erők $F = I\,l\,B\ \sin\varphi$ alapján:

$F_{AB} = 0$, mert I és B párhuzamos, 2 pont

$F_{CA} = I\,l_{CA}\,B\ \sin 90° = I\,a\ \text{tg}\alpha\ B = 4{,}7\ \text{A}\cdot 2\ \text{m}\cdot\text{tg}\ 55°\cdot 1{,}8\ \text{T} = 24{,}16\ \text{N}$,
a rajz síkjára merőlegesen befelé mutat. 3 pont

$F_{CB} = I\,l_{CB}\,B\ \sin 55° = I\,\frac{a}{\cos 55°}\,B\ \sin 55° = = I\,a\ \text{tg}\alpha\ B = 24{,}16\ \text{N}$,

a rajz síkjából merőlegesen kifelé mutat. 3 pont

c) $F_e = 0$, de van egy erőpár, amelynek forgatónyomatéka az a) pontbeli érték. 2 pont

14. f_1 = 300 mm
t_1 = 72 m

a) t_2 = ?,
ha f_2 = 50 mm, és $K_1 = K_2$
b) N = ?

a) A feladat szerint a kép mérete (K) azonos, és mivel a tárgy is azonos, a nagyítás mindkét esetben ugyanakkora.
A lencsetörvényt fölírva:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{k_1}, \text{ amiből } \frac{1}{k_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{t_1} = \frac{t_1 - f_1}{f_1 t_1},$$

$$\frac{1}{N} = \frac{t_1}{k_1} = \frac{t_1 - f_1}{f_1} = \frac{t_1}{f_1} - 1.$$

Eszerint $\frac{1}{N} = \frac{t_1}{k_1} = \frac{t_1}{f_1} - 1 = \frac{t_2}{k_2} = \frac{t_2}{f_2} - 1$, azaz $\frac{t_1}{f_1} = \frac{t_2}{f_2}$.

A kérdezett tárgytávolság: $t_2 = \frac{f_2}{f_1}t_1 = \frac{50\,\text{mm}}{300\,\text{mm}}\cdot 72\,\text{m} = \underline{\underline{12\ \text{m}}}$. 8 pont

b) A nagyítás $N = \frac{k_1}{t_1} = \left(\frac{t_1}{f_1} - 1\right)^{-1} = \left(\frac{72\,\text{m}}{0{,}3\,\text{m}} - 1\right)^{-1} = (240 - 1)^{-1} = \underline{\underline{0{,}00418}}$. 7 pont

(239-szeres kicsinyítés)