1. $r_1 = 12{,}5$ cm, $r_2 = 3{,}5$ cm, $R = 40$ cm, $n_1 = 72$ fordulat/min = 1,2 fordulat/s.
   a) v = ? b) v' = 20 km/h = 5,56 m/s, v_1 = ?

   ---

   a) Mivel a biciklilánc pontjainak sebessége azonos a lánc mentén, ebből következik, hogy

   $r_1\, n_1 = r_2\, n_2. \Rightarrow n_2 = \dfrac{r_1}{r_2} n_1 = \dfrac{12{,}5\text{ cm}}{3{,}5\text{ cm}} 1{,}2\text{ s}^{-1} = 4{,}29\text{ s}^{-1}.$ *5 pont*

   A hátsó kerék sebessége $v = 2\pi n_2 R = 2\pi \cdot 4{,}28 \cdot 0{,}4$ m/s = <u>10,78 m/s</u>. *3 pont*

   b) A hátsó kerék fordulatszámára fennáll: $2\pi\, n_2' = \dfrac{v'}{R}$.

   Az első fogaskerék fordulatszámára fennáll: $n_1' r_1 = n_2' r_2$ Az első fogaskerék kerületi sebessége

   $v_1 = 2\pi\, n_1' r_1 = 2\pi\, n_2' r_2 = \dfrac{v'}{R}\; r_2 = \dfrac{5{,}56\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}4\,\text{m}}\, 0{,}035\text{ m} = 0{,}49\text{ m/s} =$ <u>1,76 km/h</u>. *7 pont*

2. $v_0 = 22$ m/s, $t_1 = 10$ s, $t_2 = 5$ s, $v_2 = 11$ m/s, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{4}{3}$.

   a) v_1 = ? b) s = ?

   ---

   a) $a_1 = \dfrac{v_0 - v_1}{t_1},\; a_2 = \dfrac{v_1 - v_2}{t_2}.$ (lassulások) *4 pont*

   $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{4}{3} = \dfrac{v_0 - v_1}{t_1} = \dfrac{v_1 - v_2}{t_2}.$ *1 pont*

   Az egyenletből v_1 kifejezhető:

   $v_1 = \dfrac{3t_2 v_0 + 4t_1 v_2}{4t_1 + 3t_2} = \dfrac{3\cdot 5\text{ s}\cdot 22\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 4\cdot 10\text{ s}\cdot 11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\cdot 10\text{ s} + 3\cdot 5\text{ s}} =$ <u>14 m/s</u>. *5 pont*

   b) $s = \dfrac{v_0 + v_1}{2} t_1 + \dfrac{v_1 + v_2}{2} t_2 = \dfrac{22\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2}\cdot 10\text{ s} + \dfrac{14\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2}\cdot 5\text{ s} =$ <u>242,5 m</u>. *5 pont*

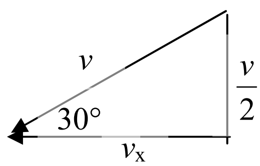
3. $M = 440$ kg, $V = 0{,}5$ m/s, $m = 150$ kg, $v = 0{,}8$ m/s, $\alpha = 30°$.
   a) u = ? b) H ?

   ---

   a) A széndarab pályája a ferde hajításnak megfelelően parabola, sebességének vízszintes komponense:

   $v_x = v \cos 30°$, vagy Pithagorasz tételét felhasználva:

   $v_x = \sqrt{v^2 - \left(\dfrac{v}{2}\right)^2} = v\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ *2 pont*



   A csille + szén rendszer vízszintes lendülete megmarad:

   $MV \pm mv_x = (M + m)\, u \;\Rightarrow u = \dfrac{MV \pm mv_x}{M + m} = \dfrac{MV \pm mv\cos\alpha}{M + m}.$

   $u = \dfrac{440\text{ kg}\cdot 0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 150\text{ kg}\cdot 0{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cos 30°}{440\text{ kg} + 150\text{ kg}}.$ *7 pont*

$\underline{u_+ = 0{,}55\text{ m/s}}$ (a széndarab azonos irányban haladt a csillével).
$\underline{u_- = 0{,}20\text{ m/s}}$ (a széndarab szembe haladt a csillével). *2 pont*

b) A széndarab függőleges sebessége $v_y = v\sin\alpha + \sqrt{2Hg}$. A lendület függőleges irányban nem marad meg, hanem nullára csökken, ezáltal nyomóerő növekedést okoz a csillének. Ha van súrlódás, ez növeli a súrlódási erőt, és lassítja a csillét. Ebben a feladatban most nem számít a H magasság, a valóságban azonban nem célszerű, ha a széndarab túl magasról esik a csillébe. *4 pont*

4. $s = 5$ m, $t = 0{,}5$ s.
   a) $H = ?$ b) $v = ?$

---

a) A fürdőző vízszintes mozgására fennáll, hogy

$$s = v_0\,t\,. \Rightarrow v_0 = \frac{s}{t} = \frac{5\text{ m}}{0{,}5\text{ s}} = 10\text{ m/s}.$$ *3 pont*

A csúszda vége és a víz közötti h magasságra fennáll, hogy $h = \frac{g}{2}t^2$, azaz

$$h = \frac{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2}0{,}5^2\text{ s}^2 = 1{,}226\text{ m}.$$ *3 pont*

Az energiamegmaradás alapján $mg(H\text{-}h) = \frac{1}{2}mv_0^2$.

$$H = h + \frac{v_0^2}{2g} = 1{,}226\text{ m} + \frac{100\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{6{,}32\text{ m}}}.$$ *4 pont*

b) Ismét az energia megmaradást használjuk föl.

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2,\ \text{vagy}\ mgH = \frac{1}{2}mv^2.$$ *3 pont*

$$v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 6{,}32\text{ m}} = \underline{\underline{11{,}13\text{ m/s}}}.$$ *2 pont*

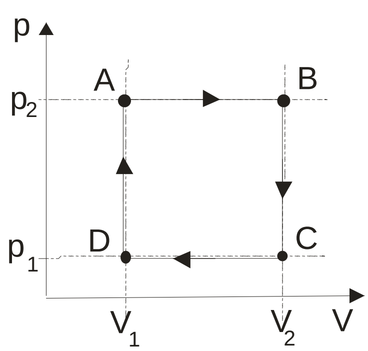
5. $m = 6$ g $= 0{,}006$ kg, $\mu = 0{,}9$, $v = 13$ m/s, $F = 1{,}8$ N.
   $R = ?$

A részecskére ható (nyugalmi) súrlódási erő $S = 2F\mu$. *5 pont*

A kavics addig marad a kerékben, amíg a forgó mozgására fennáll, hogy

$$m\frac{v^2}{R} = 2\mu F\,.\ \text{Innen}\ R = \frac{mv^2}{2\mu F} = \frac{0{,}006\text{ kg}\cdot 13^2\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2\cdot 0{,}9\cdot 1{,}8\text{ N}} = 0{,}313\text{ m} = \underline{\underline{31{,}3\text{ cm}}}.$$ *10 pont*

6. $W_{haszn} = 1600$ J, $p_1 = 10^5$ Pa,
   $V_2 = 6\cdot 10^{-3}$ m^3, $V_1 = 2\cdot 10^{-3}$ m^3, $f = 5$.
   a) $Q_{le} = ?$ b) $\eta = ?$



a) Ábrázoljuk a körfolyamatot p-V diagramon!

$W_{haszn} = (p_1 - p_2)(V_2 - V_1)$.

Az egyenletből p_2 kifejezhető:

$$p_2 = \frac{W_{haszn}}{V_2 - V_1} + p_1 = \frac{1600\,\text{J}}{(6-4)\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3} + 10^5\ \text{Pa} = 5\cdot 10^5\ \text{Pa}.$$ *3 pont*

$$A \to B\text{: } Q_{AB} = \frac{f+2}{2} nR(T_B - T_A) = \frac{f+2}{2}(p_2V_2 - p_2V_1)$$

$$Q_{AB} = \frac{7}{2}\cdot 5\cdot 10^5\ \text{Pa}\cdot 4\cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = 7000\ \text{J}.$$ *2 pont*

$$B \to C\text{: } Q_{BC} = \frac{f}{2} nR(T_C - T_B) = \frac{f}{2}(p_1V_2 - p_2V_2)$$

$$Q_{BC} = \frac{5}{2}\cdot(-4)\cdot 10^5\ \text{Pa}\cdot 6\cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = -\,6000\ \text{J}.$$ *2 pont*

$$C \to D\text{: } Q_{CD} = \frac{f+2}{2} nR(T_D - T_C) = \frac{f+2}{2}(p_1V_1 - p_1V_2)$$

$$Q_{CD} = \frac{7}{2}\cdot 10^5\ \text{Pa}\cdot(-4)\cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = -1400\ \text{J}.$$ *2 pont*

$$D \to A\text{: } Q_{DA} = \frac{f}{2} nR(T_A - T_D) = \frac{f}{2}(p_2V_1 - p_1V_1)$$

$$Q_{DA} = \frac{5}{2}\cdot 4\cdot 10^5\ \text{Pa}\cdot 2\cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = 2000\ \text{J}.$$ *2 pont*

$Q_{fel} = Q_{AB} + Q_{DA} = 9000$ J, $\quad Q_{le} = |Q_{BC} + Q_{CD}| = \underline{\underline{7400\ \text{J}}}$. *1 pont*

b) $\eta = \dfrac{W_{haszn}}{Q_{fel}} = \dfrac{1600\,\text{J}}{9000\,\text{J}} = \underline{\underline{17{,}7\ \%.}}$ *3 pont*

7. $m = 10$ g, M kalapács, rugalmatlan ütközés, $\Delta E/E = 0{,}99\ \% = 0{,}0099$.
   a) $M = ?$ b) $M' = 5$ kg, $\Delta E/E = ?$

---

a) A rugalmatlan ütközésre a lendület megmaradás fölírható:

$$Mv_0 = (M+m)u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{Mv_0}{M+m}.$$ *4 pont*

A kalapács kezdeti mozgási energiája $E = \frac{1}{2}Mv_0^2$. *2 pont*

A rendszer energiája az ütközés után $E_1 =$

$$\frac{1}{2}(M+m)u^2 = \frac{1}{2}(M+m)\frac{M^2v_0^2}{(M+m)^2} = \frac{1}{2}Mv_0^2\frac{M}{M+m} = E_0\frac{M}{M+m}.$$ *2 pont*

Az energiaveszteség $\Delta E = E_0 - E_1 = E_0\left(1 - \dfrac{M}{M+m}\right) = E_0\dfrac{m}{M+m} = 0{,}0099E_0$. *1 pont*

$$M = \frac{m(1-0{,}0099)}{0{,}0099} = 100m = 1000\ \text{g} = \underline{\underline{1\ \text{kg}}}.$$ *1 pont*

b) $\dfrac{\Delta E'}{E_0'} = \dfrac{m}{M+m} = \dfrac{0{,}01\ \text{kg}}{5{,}01\ \text{kg}} = 0{,}0019 = \underline{\underline{0{,}19\ \%.}}$ *5 pont*

8. $R = 0{,}5$ m, $t_1 = 75$ °C, $t_0 = 25$ °C, $\Delta t = 50$ °C, $\rho_{Al} = 2700$ kg/m^3, $\rho_{víz} = 1000$ kg/m^3, $g = 9{,}81$ m/s^2, $\alpha = 2{,}4\cdot10^{-5}$ 1/°C.
a) F_1 vagy F_0 nagyobb? b) $F_1 - F_0 = ?$

---

a) A gömb sugara 25 °C-on: $R_0 = \dfrac{R}{1+\alpha\cdot\Delta t} = R(1-\alpha\cdot\Delta t)$, mivel $\alpha\cdot\Delta t \ll 1$.

$R_0 = 0{,}5\text{ m}\,(1 - 2{,}4\cdot10^{-5}\cdot 50) = 0{,}9988\cdot 0{,}5\text{ m} = 0{,}4994$ m. *3 pont*

A gömb térfogata 25 °C-on: $V_0 = \dfrac{4\pi}{3}R_0^3 = \dfrac{4\pi}{3}0{,}4994^3\ \text{m}^3 = 0{,}5217\ \text{m}^3$. *2 pont*

A gömb térfogata 75 °C-on $V_1 = \dfrac{4\pi}{3}R^3 = \dfrac{4\pi}{3}0{,}5^3\ \text{m}^3 = 0{,}5236\ \text{m}^3$, *1 pont*

$V_1 > V_0$.

A rugós erőmérő a gömbre ható gravitációs erőnek és a felhajtóerőnek a különbségét mutatja:

$F_1 = V_0\rho_{Al}\,g - V_1\rho_{víz}g$, *3 pont*

$F_0 = V_0\rho_{Al}\,g - V_0\rho_{víz}g$, és $F_1 < F_0$ mert $V_1 > V_0$. *3 pont*

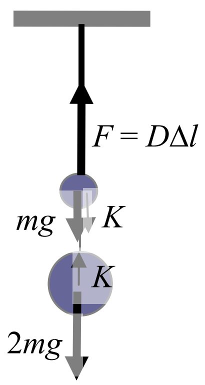
Tehát 25 °C-on az erőmérő többet mutat, mert kisebb a felhajtóerő.

b) $F_1 - F_0 = V_0\rho_{Al}\,g - V_1\rho_{víz}g - (V_0\rho_{Al}\,g - V_0\rho_{víz}g) = -V_0\,\rho_{víz}\,(3\alpha\cdot\Delta t)\,g$

$F_1 - F_0 = -\,0{,}5217\ \text{m}^3\cdot 1000\ \text{kg/m}^3\cdot 3\cdot 2{,}4\cdot10^{-5}\cdot 50\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{-18{,}42\ \text{N}}}$. *3 pont*

Megjegyzés: Ha a gömb sugarát 25 °C-on vesszük 0,5 m-nek, az erők különbségében a térfogat helyére 0,5223 m^3 írandó, és eredményül 18,45 N adódik. Mindkét megoldást fogadjuk el.

9.



a) A cérna elvágása előtt a rendszer egyensúlyban van:

$F = K + mg$, *1 pont*

$K = 2mg$. *1 pont*

$F = 3mg \Rightarrow\ D = \dfrac{3mg}{\Delta l}$. *1 pont*

A cérna elvágása után $K = 0$ lesz, és a testek kezdősebesség nélkül mozogni kezdenek. A mozgásegyenletek:

$ma_1 = F - mg = 2mg,\ \Rightarrow\ \underline{a_1 = 2g}$ <u>(fölfelé),</u> *3 pont*

$2ma_2 = 2mg,\ \Rightarrow\ \underline{a_2 = g}$ <u>(lefelé).</u> *3 pont*

b) Az m mozgására felírható az energiamegmaradás:

$$\frac{1}{2}D(\Delta l)^2 = mgh \qquad \Rightarrow\ h = \frac{D(\Delta l)^2}{2mg} = \frac{3}{2}\Delta l.$$ *6 pont*

10. $v = 3{,}2$ m/s, $B = 3{,}6$ T, $E = 1700$ N/C, $A = 7{,}5$ cm^2, $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi k} = 8{,}854\cdot10^{-12}\ \dfrac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}$.

$F = ?$ (nagyság és irány)

A pozitív töltésű lemezre a Gauss-törvény alapján: $EA = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, így $Q = EA\varepsilon_0$. *5 pont*

$Q = 1700\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot 7{,}5\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2 \cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\ \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2} = \underline{1{,}129\cdot 10^{-11}\ \mathrm{C}}.$ *3 pont*

A töltésekre ható erő a Lorentz-erő, merőleges a sebességre és a B-vonalakra és a rajz síkjából kifelé mutat:

$F = QvB = 1{,}129\cdot 10^{-11}\ \mathrm{C}\cdot 3{,}2\ \mathrm{m/s}\cdot 3{,}6\ \mathrm{T} = \underline{\underline{1{,}3\cdot 10^{-10}\ \mathrm{N}}}.$ *7 pont*

11. $R_b = 2\ \Omega$, $\to 0{,}8P_{max}$
$P = ?$

---

a) Az R ellenállású fogyasztó a maximális teljesítményt akkor veszi föl, ha $R = R_b$. *3 pont*

$$P_{max} = \frac{U^2}{(R+R_b)^2}R = \frac{U^2}{(R_b+R_b)^2}R_b = \frac{U^2}{4R_b}.$$ *3 pont*

A megváltozott belső ellenállásra fennáll, hogy $0{,}8P_{max} = \dfrac{U^2}{4R_b'}$, amiből

$$R_b' = \frac{R_b}{0{,}8} = 1{,}25R_b.$$ *3 pont*

b) A fogyasztóra (ellenállása maradt R_b) jutó teljesítmény:

$$P = \frac{U^2}{(R_b+R_b')^2}R_b = \frac{U^2}{(R_b+1{,}25R_b)^2}R_b = \frac{U^2}{2{,}25^2R_b} = \frac{4P_{max}}{2{,}25^2} = 0{,}79.$$ *5 pont*

Eszerint a teljesítmény 21 %-kal csökkent. *1 pont*

12. $A = 40\ \mathrm{cm}^2$, $H = 90$ cm, $a = 10\ \mathrm{cm}^2$, $h = 20$ cm, $L = 100$ cm, $p_k = 10^5$ Pa, $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s}^2$, $\rho = 13600\ \mathrm{kg/m}^3$, $f = 5$.
$Q = ?$

A nitrogén eredeti térfogata és nyomása a kiinduló T_0 hőmérsékleten:

$V_0 = AH = 3600\ \mathrm{cm}^3 = 3{,}6\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$, *1 pont*

$p_0 = p_k + \rho(H-h)g = 10^5\ \mathrm{Pa} + 13600\ \mathrm{kg/m}^3\cdot 0{,}7\ \mathrm{m}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s}^2 = 1{,}93\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}.$ *1 pont*

A megengedett térfogatváltozás $\Delta V = ah = 200\ \mathrm{cm}^3 = 0{,}2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$. *1 pont*

Eszerint a nitrogén alatt a higany $x = \dfrac{\Delta V}{A} = \dfrac{200}{40}$ cm = 5 cm = 0,05 m-t süllyed. *1 pont*

A gáz térfogata, nyomása tehát a végső T hőmérsékleten:

$V = V_0 + \Delta V = 3800\ \mathrm{cm}^3 = 3{,}8\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$, *1 pont*

$p = p_k + \rho(H+x)g = 10^5\ \mathrm{Pa} + 13600\ \mathrm{kg/m}^3\cdot 0{,}95\ \mathrm{m}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s}^2 = 2{,}27\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}.$ *1 pont*

A szükséges hőt az I. főtételből tudjuk kiszámítani: $Q = \Delta E + |W|$

A belső energia változása:

$$\Delta E = \frac{f}{2}nR(T-T_0) = \frac{f}{2}(pV - p_0V_0).$$ *2 pont*

$$\Delta E = \frac{5}{2}(2{,}27\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\cdot 3{,}8\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 - 1{,}93\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\cdot 3{,}6\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3) = 419{,}5\ \mathrm{J}.$$ *1 pont*

A munkát a p-V diagram alatti területből számolhatjuk, felhasználva, hogy az állapotváltozást egyenes írja le, mivel a gáz nyomása a higanyoszlop magasságával (azaz a térfogattal) lineárisan változik. A munkát a gáz végzi.

$$|W| = \frac{p+p_0}{2}\Delta V = \frac{(2{,}27+1{,}93)\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}}{2}\cdot 0{,}2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3 = 42\ \mathrm{J}.$$ *5 pont*

$Q = \Delta E + |W| = 419{,}5\ \mathrm{J} + 42\ \mathrm{J} = \underline{\underline{461{,}5\ \mathrm{J}}}.$ *1 pont*