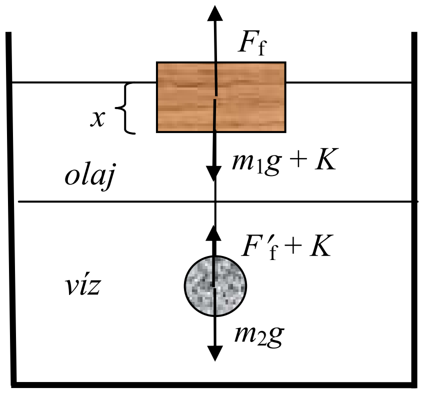


1. $\rho_v = 10^3$ kg/m^3, $\rho_o = 8\cdot10^2$ kg/m^3, $m_1 = 3$ kg,
$\rho_1 = 5\cdot10^2$ kg/m^3, $d = 8$ cm,
$m_2 = 0{,}8$ kg, $\rho_{Al} = 2{,}7\cdot10^3$ kg/m^3.

---

a) $x = ?$ b) $M = ?$

a) A deszka és a golyó egyensúlyban van, így fennáll:

$m_1g + K - F_f = 0$ és *3 pont*

$m_2g - K - F'_f = 0.$ *3 pont*

A két egyenletből

$m_1g - F_f + m_2g - F'_f = 0,$

$m_1g - V'\rho_o g + m_2 g - \frac{m_2}{\rho_{Al}}\rho_v g = 0$, ahol V' a deszka olajba merülő részének térfogata. Innen

$$V' = \frac{m_1 + m_2 - \frac{m_2}{\rho_{Al}}\rho_v}{\rho_o} = \frac{3\,\text{kg} + 0{,}8\,\text{kg} - \frac{0{,}8\,\text{kg}}{2{,}7\cdot10^3\,\text{kg/m}^3}\cdot10^3\,\text{kg/m}^3}{800\,\text{kg/m}^3} = 4{,}38\cdot10^{-3}\,\text{m}^3 =$$

$= 4{,}38{,}\text{dm}^3.$ *2 pont*

Mivel $V' = x\cdot A$ és $m_1 = d\cdot A\cdot\rho_1$, így

$$x = \frac{V'}{A} = \frac{V'}{m_1}d\rho_1 = \frac{4{,}38\cdot10^{-3}\,\text{m}^3}{3\,\text{kg}}\cdot 8\,\text{cm}\cdot5\cdot10^2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \underline{\underline{5{,}84\,\text{cm}}}.$$ *2 pont*

b) Ha a deszkára M tömegű terhet teszünk, akkor az egyensúly feltétele módosul:

$Mg + m_1 g - \frac{m_1}{\rho_1}\rho_o g + m_2 g - \frac{m_2}{\rho_{Al}}\rho_v g = 0$. Ebből *3 pont*

$$M = -m_1 + \frac{m_1}{\rho_1}\rho_o - m_2 + \frac{m_2}{\rho_{Al}}\rho_v =$$

$$= -3\,\text{kg} + \frac{3\,\text{kg}}{5\cdot10^2\,\text{kg/m}^3}\cdot800\,\text{kg/m}^3 - 0{,}8\,\text{kg} + \frac{0{,}8\,\text{kg}}{2{,}7\cdot10^3\,\text{kg/m}^3}\cdot10^3\,\text{kg/m}^3 =$$

$= 1{,}296$ kg $\approx \underline{\underline{1{,}3\text{ kg.}}}$ *2 pont*

2. $v_0 = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\Delta v = -2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\Delta t = 1$ s.

---

a) $v = ?$ $t = 8$ s b) $v_{átl} = ?$ c) $s = ?$

a) A test gyorsulása (lassulása)

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\,\text{s}} = -2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$ *2 pont*

A test sebessége 8 s elteltével:

$v = v_0 + at = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + (-2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2})\cdot8\text{ s} = \underline{\underline{4\text{ m/s}}}.$ *3 pont*

b) Az átlagsebesség megegyezik a középsebességgel:

$$v_{átl} = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = \underline{\underline{12\text{ m/s}}}.$$ *5 pont*

c) A megállásig eltelt időre fennáll, hogy

$$v' = v_0 + at' = 0, \text{ amiből } t' = \frac{v_0}{a} = \frac{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{-(-2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2})} = 10\text{ s}.$$ *2 pont*

A megtett út:

$$s = v_0 t + \frac{a}{2}t'^2 = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 10\text{ s} + \frac{-2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2}\cdot(10\text{ s})^2 = 200\text{ m} - 100\text{ m} = \underline{\underline{100\text{ m}}}.$$ *3 pont*

3. $m = 10$ g = 0,01 kg, $M = 7$ kg, $s = 0,25$ m, $\mu = 0,05$, $g = 9,81$ m/s^2.

$u = ?$

A kocka+golyó együttes M' tömegre írjuk föl a munkatételt:

$\frac{1}{2}M'v^2 = \mu M' gs$, ebből a közös sebesség $v = \sqrt{2\mu gs} = \sqrt{2\cdot 0,05\cdot 9,81\cdot 0,25}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,495\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

7 pont

A golyó és a kocka ütközése teljesen rugalmatlan, így a lendületmegmaradás:

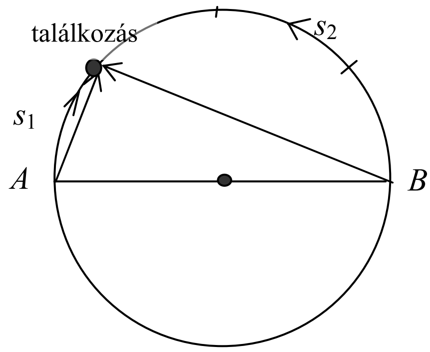
$m\,u + M\cdot 0 = (M + m)\,v$, ahonnan a golyó kezdeti sebessége kifejezhető:

$$u = \frac{M+m}{m}v = \frac{7,01}{0,01}\cdot 0,495\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{347,2\text{ m/s}}}.$$ *8 pont*

4. $v_A = 8\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{20}{9}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $R = 64$ m, $s_1 = \frac{2R\pi}{8} = \frac{R\pi}{4} = 16\pi$ m.

---

a) $\alpha = ?$ b) $t_2 = ?$ c) $d_1 = ?$ $d_2 = ?$ $\beta = ?$



a) Az ábráról – a Thalész-tételt alkalmazva – leolvasható, hogy a futók elmozdulásai $\alpha = 90$ °-os szöget zárnak be egymással. *4 pont*

b) A B futó által megtett út, akkor, amikor szemben futnak:

$$s_2 = \frac{2R\pi}{2} - s_1 = R\pi - \frac{R\pi}{4} = \frac{3R\pi}{4}.$$

Mivel a találkozásig azonos ideig futottak, fennáll, hogy

$s_1 = v_A t$ és $s_2 = v_B t$, ahonnan

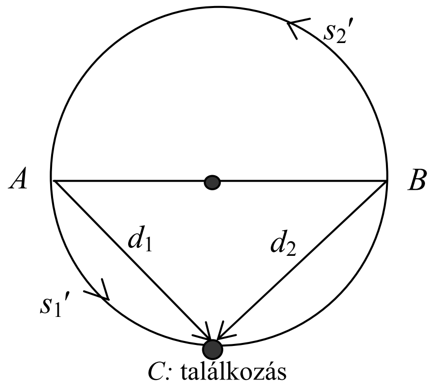
$$v_B = \frac{s_2}{t} = \frac{s_2}{\frac{s_1}{v_A}} = \frac{s_2}{s_1}v_A = \frac{\frac{3R\pi}{4}}{\frac{R\pi}{4}}\cdot v_A = 3v_A.$$ *2 pont*

Amikor egy irányban futnak, a B futó éppen félkerületnyi úttal többet tesz meg, mint A:

$s_2' = s_1' + R\pi$. *2 pont*

Mivel $s_1' = v_A t'$ és $s_2' = v_B t' = 3\,v_A t'$, így fennáll

$$3\,v_A t' = v_A t' + R\pi.$$



A találkozásig eltelt t' idő

$$t' = \frac{R\pi}{2v_A} = \frac{64\,\text{m}\cdot\pi}{2\cdot\frac{20}{9}\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \underline{\underline{45{,}24\ \text{s}}}.$$ *2 pont*

c) A *B* futó által a találkozásig megtett út:

$$s_1' = v_A t' = \frac{R\pi}{2} = \frac{2R\pi}{4},$$ azaz a kör kerületének egynegyede. Így a *C* pontban találkoznak. A Thalész-tétel alapján az elmozdulások most is $\beta = 90°$-os szöget zárnak be egymással. *3 pont*

A két futó elmozdulásának nagysága megegyezik, és Pithagorász-tétele alapján

$$d = d_1 = d_2 = \frac{2R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2} = 64\,\text{m}\cdot\sqrt{2} = \underline{\underline{90{,}51\ \text{m}}}.$$ *2 pont*

5. $m = 5$ kg, $\alpha = 30°$, $F_1 = 40\sqrt{3}$ N, $F_2 = 30$ N, $F_3 = 20$ N.

a) $W_i = ?$ $s = 6{,}5$ m b) $t = ?$ $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

a) Az egyes erők által végzett munka:

$W_1 = F_1\cdot s\cdot\cos\alpha = 40\sqrt{3}\ \text{N}\cdot 6{,}5\ \text{m}\cdot\cos 30° = \underline{\underline{390\ \text{J}}}.$ *2 pont*

$W_2 = F_2\cdot s = 30\ \text{N}\cdot 6{,}5\ \text{m} = \underline{\underline{195\ \text{J}}}.$ *2 pont*

$W_3 = F_3\cdot s\cdot\cos 90° = 0.$ *1 pont*

$W_{mg} = mg\cdot s\cdot\cos(90° + \alpha) = 5\ \text{kg}\cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 6{,}5\ \text{m}\cdot\cos 120° = \underline{\underline{-162{,}5\ \text{J}.}}$ *2 pont*

b) A munkatétel alapján

$$\frac{1}{2}mv^2 = \sum W_i,$$ ahonnan

$$v = \sqrt{\frac{2\sum W_i}{m}} = \sqrt{\frac{2(390\,\text{J} + 195\,\text{J} + 0 - 162{,}5\,\text{J})}{5\,\text{kg}}} = 13\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$ *6 pont*

A megtett útra fennáll, hogy

$$s = \frac{v\cdot t}{2},$$ ahonnan $$t = \frac{2s}{v} = \frac{2\cdot 6{,}5\ \text{m}}{13\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \underline{\underline{1\ \text{s}.}}$$ *2 pont*

Megjegyzés (a *b.* rész másik megoldása)

A lejtővel párhuzamos erők eredője:

$$\sum F_{lejtő} = F_2 - mg\sin\alpha + F_1\cos\alpha = 30\,\text{N} - 50\,\text{N}\cdot\frac{1}{2} + 40\sqrt{3}\,\text{N}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 65\ \text{N}.$$ *6 pont*

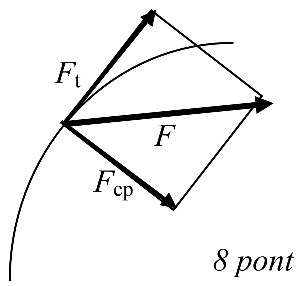
A gyorsulás: $$a = \frac{\sum F_{lejtő}}{m} = \frac{65\,\text{N}}{5\,\text{kg}} = 13\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Így $t=\sqrt{\dfrac{2s}{a}}=\sqrt{\dfrac{2\cdot 6{,}5\,\mathrm{m}}{13\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}=\underline{\underline{1\ \mathrm{s}}}.$ *2 pont*

6. $r = 0{,}5$ m, $t = 0{,}2$ s, $\omega = 5$ 1/s, $m = 0{,}4$ kg.
a) $F = ?$ b) $\alpha = ?$ c) $T = ?$

a) A testre ható eredő erő érintőleges (tangenciális komponense):

$$F_\mathrm{t} = ma = m\frac{r\omega}{t} = 0{,}4\,\mathrm{kg}\frac{0{,}5\,\mathrm{m}\cdot 5\,\frac{1}{\mathrm{s}}}{0{,}2\,\mathrm{s}} = 5\ \mathrm{N}.$$



A testre ható erő centripetális komponense:

$$F_\mathrm{cp} = m\,r\,\omega^2 = 0{,}4\ \mathrm{kg}\cdot 0{,}5\ \mathrm{m}\cdot 25\ 1/\mathrm{s}^2 = 5\ \mathrm{N}.$$

Mivel F_t és F_cp egymásra merőlegesek, és nagyságuk éppen megegyezik, az eredő erő $F = F_t\sqrt{2} = 5\,\mathrm{N}\cdot\sqrt{2} = \underline{\underline{7{,}07\ \mathrm{N}}}$. *8 pont*

b) Az eredő erő az érintővel 45°-os szöget zár be. *2 pont*

c) A test szöggyorsulása $\beta = \dfrac{\omega}{t} = 25\ \dfrac{1}{\mathrm{s}^2}$, egy körbefordulás szöge 2π. Így fölírható, hogy

$$2\pi = \frac{\beta}{2}T^2,$$ ebből az első körbefordulás ideje:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi}{\beta}} = \sqrt{\frac{4\pi}{25}}\ \mathrm{s} = \underline{\underline{0{,}708\ \mathrm{s}}}.$$ *5 pont*

7. $V = 50$ liter $= 5\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^3$, $p_1 = 1{,}4\cdot 10^7$ Pa, $T_1 = 27$ °C $= 300$ K, $O_2 \rightarrow M = 32$ g/mol.

a) $m = ?$ b) $V_2 = ?$ $p_2 = 2\cdot 10^5$ Pa, $T_2 = 17$ °C $= 290$ K
c) $\Delta m = ?$ $p_2 = 5\cdot 10^6$ Pa, $T_2 = 37$ °C $= 310$ K

a) Az állapotegyenlet alapján, felhasználva az oxigén moláris tömegét:

$$p_1V = \frac{m}{M}RT_1,$$ ahonnan

$$m = \frac{p_1VM}{RT_1} = \frac{1{,}4\cdot 10^7\ \mathrm{Pa}\cdot 5\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^3\cdot 32\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}}{8{,}31\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}\cdot 300\,\mathrm{K}} = 8985{,}2\ \mathrm{g} = \underline{\underline{8{,}96\ \mathrm{kg}}}.$$ *5 pont*

b) Az egyesített gáztörvényt alkalmazva:

$$\frac{p_1V}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2},$$ ahonnan

$$V_2 = \frac{p_1V\cdot T_2}{p_2T_1} = \frac{1{,}4\cdot 10^7\ \mathrm{Pa}\cdot 5\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^3\cdot 290\,\mathrm{K}}{2\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\cdot 300\,\mathrm{K}} = 3{,}833\ \mathrm{m}^3 = \underline{\underline{3833{,}3\ \mathrm{liter}}}$$ *5 pont*

c) A Δm tömegű oxigén elhasználása utáni gáz tömegére fennáll, hogy

$$p_3V = \frac{m_2}{M}RT_3,$$ ahonnan

$$m_2 = \frac{p_3 V M}{R T_3} = \frac{5\cdot 10^6\,\text{Pa}\cdot 5\cdot 10^{-2}\,\text{m}^3\cdot 32\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}}{8{,}31\,\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}\cdot 310\,\text{K}} = 3105{,}5\ \text{g}.$$

Így $\Delta m = m - m_2 = 8985{,}2\ \text{g} - 3105{,}5\ \text{g} = \underline{\underline{5879{,}7\ \text{g} \approx 5{,}88\ \text{kg}}}$. *5 pont*

8. $p_1 = 2\cdot 10^5$ Pa, $V_1 = 2$ m^3, $T_1 = 300$ K, $V_2 = 3V_1$, oxigén $\rightarrow f = 5$.
a) Q_{AB} = ? Q_{BC} = ? Q_{CA} = ? b) W = ?

---

a) Először keressük meg a gáz állapothatározóinak értékét az *A, B, C* állapotokban:

A: p_1, V_1, T_1, az állapotegyenlet: $p_1\cdot V_1 = nRT_1$

B: $3p_1$, $3V_1$, T_B , az állapotegyenlet: $3p_1\cdot 3V_1 = nRT_B$

C: $4p_1$, V_1, T_C, az állapotegyenlet: $4p_1\cdot V_1 = nRT_C$

Az *A* és *B*-re fölírt állapotegyenlet osztásából: $\underline{\underline{T_B = 9T_1}}$, a *C*-re és *A*-ra fölírt állapotegyenlet osztásából $\underline{\underline{T_C = 4T_1}}$.

A folyamatokhoz tartozó hőmennyiségeket az I. főtétel segítségével kaphatjuk meg, ehhez meghatározzuk a folyamatokhoz tartozó energiaváltozásokat, és a gázon végzett munkát.

$A\rightarrow B$:

$$W_{AB} = -\frac{3p_1 + p_1}{2}(3V_1 - V_1) = -4\,p_1V_1$$

$$\Delta E_{AB} = \frac{f}{2}nR(T_B - T_1) = \frac{5}{2}\frac{p_1V_1}{T_1}(9T_1 - T_1) = 20\,p_1V_1$$

$$Q_{AB} = \Delta E_{AB} - W_{AB} = 20\,p_1V_1 - (-4\,p_1V_1) = 24\,p_1V_1 =$$
$$= 24\cdot 2\cdot 10^5\cdot 2\ \text{J} = \underline{\underline{96\cdot 10^5\ \text{J}}}.$$ *4 pont*

$B\rightarrow C$:

$$W_{BC} = -\frac{3p_1 + 4p_1}{2}(V_1 - 3V_1) = 7\,p_1V_1$$

$$\Delta E_{BC} = \frac{f}{2}nR(T_C - T_B) = \frac{5}{2}\frac{p_1V_1}{T_1}(4T_1 - 9T_1) = -12{,}5\,p_1V_1$$

$$Q_{BC} = \Delta E_{BC} - W_{BC} = -12{,}5\,p_1V_1 - 7\,p_1V_1 =$$
$$= -19{,}5\,p_1V_1 = -19{,}5\cdot 2\cdot 10^5\cdot 2\ \text{J} = \underline{\underline{-78\cdot 10^5\ \text{J}}}.$$ *4 pont*

$C\rightarrow A$:

$$W_{CA} = 0$$

$$\Delta E_{CA} = \frac{f}{2}nR(T_A - T_C) = \frac{5}{2}\frac{p_1V_1}{T_1}(T_1 - 4T_1) = -7{,}5\,p_1V_1$$

$$Q_{BC} = \Delta E_{BC} = -7{,}5\,p_1V_1 = -7{,}5\cdot 2\cdot 10^5\cdot 2\ \text{J} = \underline{\underline{-30\cdot 10^5\ \text{J}}}.$$ *4 pont*

b) A körfolyamatban a környezet végzett munkát a gázon:
$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = -4\,p_1V_1 + 7\,p_1V_1 + 0 = 3\,p_1V_1 = 3\cdot 2\cdot 10^5\cdot 2\ \text{J} = \underline{\underline{12\cdot 10^5\ \text{J}}}$. *3 pont*

9. $V_1 = 1{,}5$ dm^3, $p_1 = 3\cdot 10^5$ Pa, $T_1 = 310$ K
$V_2 = 3$ dm^3, $p_2 = 2\cdot 10^5$ Pa, $T_2 = 300$ K
p = ? V = ? T = ?

$V = V_1 + V_2 = (1{,}5 + 3)$ dm^3 = $\underline{\underline{4{,}5\ \text{dm}^3}}$. *2 pont*

Mivel a rendszer zárt (elszigetelt a környezettől), a belső energiája nem változik:

$\frac{f}{2}n_1RT_1 + \frac{f}{2}n_2RT_2 = \frac{f}{2}nRT$, ezenkívül fennáll, hogy $n = n_1 + n_2$. *5 pont*

A bal és jobb oldali gázra kezdetben az állapotegyenlet: $p_1V_1 = n_1RT_1$ ill. $p_2V_2 = n_2RT_2$.
Behelyettesítve az energiamegmaradás képletébe

$$T=\frac{n_1RT_1+n_2RT_2}{n_1R+n_2R}=\frac{p_1V_1+p_2V_2}{\frac{p_1V_1}{T_1}+\frac{p_2V_2}{T_2}}=\frac{3\cdot 1{,}5+2\cdot 3}{\frac{3\cdot 1{,}5}{310\,\mathrm{K}}+\frac{2\cdot 3}{300\,\mathrm{K}}}=\underline{\underline{304{,}2\ \mathrm{K}}}.$$ *5 pont*

A nyomás az egyesített gáz állapotegyenletéből kapható meg:

$$p=\frac{(n_1+n_2)RT}{V_1+V_2}=\frac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}=\frac{3\cdot 1{,}5+2\cdot 3}{4{,}5}\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}=\underline{\underline{2{,}33\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}}}.$$ *3 pont*

10. D_1 = 8 N/m, D_2 = 5 N/m, m = 4 kg, s_1 = 20 cm = 0,2 m.

a) v_A = ? b) s_2 = ? c) T = ?

a) A munkatétel felhasználásával, figyelembe véve, hogy a baloldali rugó megnyúlása és a jobboldali rugó összenyomódása egyaránt $\Delta l = s_1$ = 0,2 m, fennáll:

$$\frac{1}{2}mv_A^2-0=\frac{1}{2}D_1(\Delta l)^2+\frac{1}{2}D_2(\Delta l)^2.$$ Innen

$$v_A=\sqrt{\frac{(D_1+D_2)(\Delta l)^2}{m}}=0{,}2\,\mathrm{m}\cdot\sqrt{\frac{13\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{4\,\mathrm{kg}}}=\underline{\underline{0{,}36\ \mathrm{m/s}}}.$$ *6 pont*

b) Mivel energiaveszteség nincs, így a test A-tól balra $s_2 = s_1$ = $\underline{\underline{0{,}2\ \mathrm{m}}}$ távolságra jut el. *3 pont*

c) A két rugó helyettesíthető egyetlen $D = D_1 + D_2$ rugóállandójú rugóval („párhuzamos kapcsolás”), így a rezgés periódusideje:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{D_1+D_2}}=2\pi\sqrt{\frac{4\,\mathrm{kg}}{13\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}}=3{,}49\ \mathrm{s}\approx\underline{\underline{3{,}5\ \mathrm{s}}}.$$ *6 pont*

11. R = 10 cm = 0,1 m, A = 2 mm² = $2\cdot 10^{-6}$ m², I = 5 A, $\rho_{el} = 6\cdot 10^{28}$ 1/m³, $Q_{el} = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C.
$v_{óra}$ vagy v_{el} a nagyobb?

A percmutató T = 60 perc = 3600 s alatt fordul egyszer körbe. A mutató végpontjának sebessége:

$$v_{óra}=\frac{2R\pi}{T}=\frac{2\cdot 0{,}1\,\mathrm{m}\cdot\pi}{3600\ \mathrm{s}}=\underline{\underline{1{,}745\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m/s}}}.$$ *6 pont*

Az áramerősség definíciója alapján:

$$I=\frac{Q}{t}=\frac{V\cdot\rho_{el}\cdot Q_{el}}{t}=\frac{l\cdot A\cdot\rho_{el}\cdot Q_{el}}{t}$$, ahol l az elektronok t idő alatt megtett útja. Ebből

$$v=\frac{l}{t}=\frac{I}{A\cdot\rho_{el}\cdot Q_{el}}=\frac{5\,\mathrm{A}}{2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2\cdot 6\cdot 10^{28}\frac{1}{\mathrm{m}^3}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}=\underline{\underline{2{,}604\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m/s}}}.$$ *8 pont*

Tehát az elektronok mozognak gyorsabban. *1 pont.*

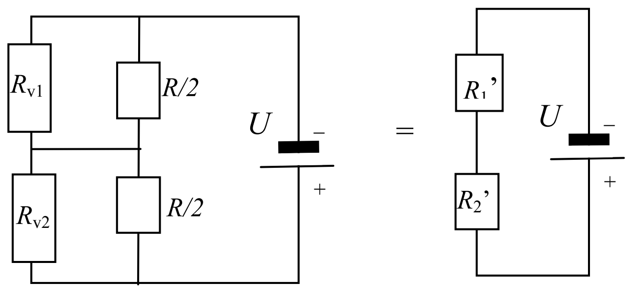
12. U = 180 V, R = 10 kΩ, R_{v1}= 6 kΩ, R_{v2}= 4 kΩ.
a) V_1 = ? V_2 = ? ha K nyitva b) V_1 = ? V_2 = ? ha K zárva, és R feleződik
c) R_x = ? ha $V_1 = V_2$

a) Ha a kapcsoló nyitva van a voltmérőkön összesen éppen U feszültség esik, és az egyes feszültségek az ellenállások arányában esnek:

$U = V_1 + V_2$ illetve $\frac{V_1}{R_{v1}} = \frac{V_2}{R_{v2}}$, azaz $\frac{V_1}{6} = \frac{V_2}{4}$. Ez utóbbiból $V_1 = 1{,}5 \cdot V_2$.

$V_2 = \frac{U}{2{,}5} = \underline{\underline{72\ \text{V}}}$, és $V_1 = 1{,}5 \cdot 72\ \text{V} = \underline{\underline{108\ \text{V}}}$. *4 pont*

b) Ha a kapcsoló zárva van, az ábra szerinti kapcsolást kapjuk:



$$\frac{1}{R_1'} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{\text{k}\Omega} = \frac{11}{30}\,\frac{1}{\text{k}\Omega}$$

$$\frac{1}{R_2'} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{\text{k}\Omega} = \frac{9}{20}\,\frac{1}{\text{k}\Omega}$$

Az eredő ellenállás:

$$R_e = \left(\frac{30}{11} + \frac{20}{9}\right)\ \text{k}\Omega = 4{,}949\ \text{k}\Omega$$

$I = \frac{U}{R_e} = \frac{180\,\text{V}}{4{,}949\,\text{k}\Omega} = 36{,}36$ mA, ennek alapján a voltmérőkön eső feszültségek:

$V_1 = IR_1' = 36{,}36\ \text{mA} \cdot \frac{30}{11}\ \text{k}\Omega = \underline{\underline{99{,}17\ \text{V}}}$, $V_2 = IR_2' = 36{,}36\ \text{mA} \cdot \frac{20}{9}\ \text{k}\Omega = \underline{\underline{80{,}8\ \text{V}}}$ *6 pont*

c) A két voltmérő egyforma feszültséget mutat (éppen $U/2 = 90$ V-ot), ha $R_1' = R_2'$.

Így írhatjuk, hogy $\frac{1}{R_{v1}} + \frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_{v2}} + \frac{1}{R - R_x}$. Érdemes behelyettesíteni az adatokat:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{R_x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10 - R_x}. \qquad (*)$$

Átrendezve a $R_x^2 - 34R_x + 120 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, ennek egyik gyöke a megoldás: $R_x = \underline{\underline{4\ \text{k}\Omega}}$, és $R - R_x = \underline{\underline{6\ \text{k}\Omega}}$. *5 pont*

Megjegyzés: Erre az eredményre számolás nélkül is rájöhetünk, elég ránézni (*) egyenletre és észrevenni, hogy a voltmérők ellenállásainak összege is éppen 10 kΩ.

13. $U = 230$ V, $f_0 = 50$ Hz $\rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 = 314$ Hz rezonancia, $I_0 = 20$ A;
$f = 100\ \text{Hz} = 2f_0$, $I = 11$ A.
$R = ?$ $L = ?$ $C = ?$

---

a) Rezonancia esetén $X_{C0} = X_{L0}$, tehát $Z_0 = R = \frac{U}{I_0} = \frac{230\,\text{V}}{20\,\text{A}} = \underline{\underline{11{,}5\ \Omega}}$. *3 pont*

b) Ha nincs rezonancia $Z = \frac{U}{I} = \frac{230\,\text{V}}{11\,\text{A}} = 20{,}91\ \Omega$. Ennek alapján írhatjuk, hogy

$$(X_L - X_C)^2 = Z^2 - R^2 = (20{,}91^2 - 11{,}5^2)\ \Omega^2 \rightarrow X \equiv (X_L - X_C) = \pm 17{,}463\ \Omega.$$

Rezonancia esetén $LC = \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2}$, másrészt

$$L 2 \cdot 2\pi f_0 - \frac{1}{C \cdot 2 \cdot 2\pi f_0} = X \qquad (**)$$

$LC \cdot 16\pi^2 f_0^2 - 1 = XC \cdot 4\pi f_0 \rightarrow 4 - 1 = XC 4\pi f_0$. Ebből (az is látszik, hogy $X > 0$ lehet):

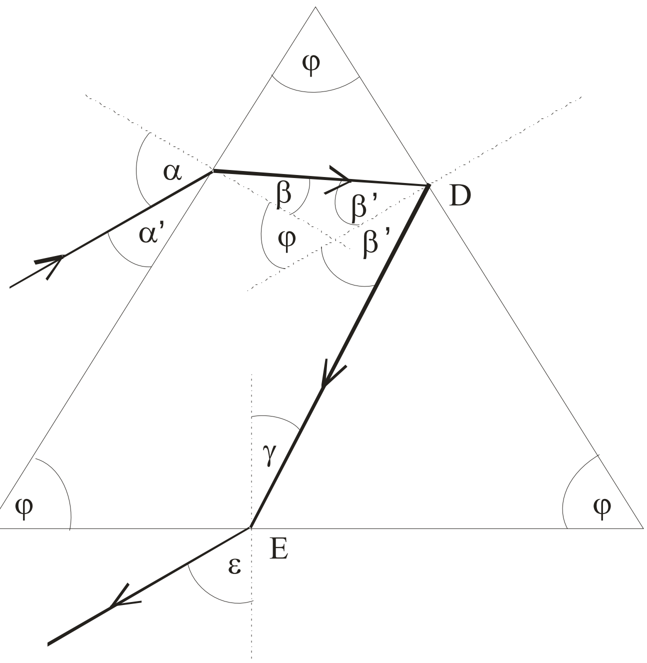
$$C = \frac{3}{X 4\pi f_0} = \frac{3}{17{,}463\ \Omega \cdot 4\pi \cdot 50\,\text{Hz}} = \underline{\underline{2{,}734 \cdot 10^{-4}\ \text{F}}}.$$ *6 pont*

A (**) egyenletbe most C-t behelyettesítve:

$$L = \frac{X}{3\pi f_0} = \frac{17{,}463\,\Omega}{3\pi \cdot 50\,\text{Hz}} = \underline{\underline{0{,}037\ \text{H}}}.$$ *6 pont*

14. φ = 60°, n = 2, α' = 30°.

a) ε = ? ε′ = ? b) c_p = ? $c_{vák} = 3 \cdot 10^8$ m/s.



a) 1. eset:

A beesési szög: α = 90° – α′ = 60°. *1 pont*

A Snellius-Descartes törvényből

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{\sin 60°}{2} = 0{,}4330,$$

β = 25,66°. *1 pont*

Az ábra alapján

φ = β + β′ , amiből

β′ = φ – β = 60° – 25,66° = 34,34°. *1 pont*

A teljes visszaverődés határszögére fennáll, hogy

$$\sin\alpha_h = \frac{1}{n} = \frac{1}{2},$$ amiből α_h = 30°.

Mivel β′ > α_h, így D-nél teljes visszaverődés lép fel. *1 pont*

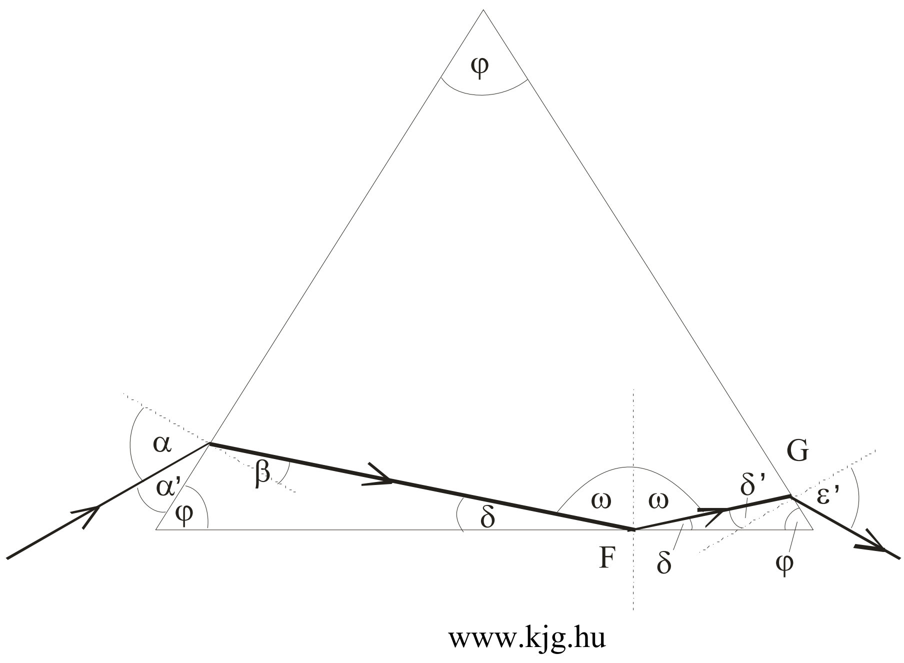
Az ábrából a γ szögre teljesül, hogy

γ = 90° –[180° – φ – (90° – β′)] = φ – β′ = 60° – 34,34° = 25,66° = β. *1 pont*

Mivel γ < α_h, E-nél a fénysugár kilép a prizmából, és az ε szögre fennáll, hogy

sin ε = n sin γ = n sin β, ebből sin ε = sin α és így <u>ε = α = 60°</u>. *2 pont*

2. eset:



A rajz alapján

$\delta = 180° - \varphi - (90° + \beta') = 90° - \varphi - \beta' = 90° - 60° - 25{,}66° = 4{,}34°$. *1 pont*

Mivel $\omega = 90° - \delta = 90° - 4{,}34° = 85{,}66° > \alpha_h$,

így F-nél teljes visszaverődéslép fel. *1 pont*

A δ' szög nagysága:

$\delta' = 180° - \delta - \varphi - 90° = 180° - 4{,}34° - 60° - 90° = 25{,}66° = \beta$. *1 pont*

Így, mivel $\delta' < \alpha_h$, G-nél a fénysugár kilép a prizmából és

$\sin\varepsilon' = n \sin\delta' = n \sin\beta$, ebből $\underline{\underline{\varepsilon' = \alpha = 60°}}$. *2 pont*

b) A törési törvényből

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_{vák}}{c_p}, \text{ ahonnan } c_p = \frac{c_{vák}}{n} = \frac{3\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = \underline{\underline{1{,}5\cdot 10^8\ \text{m/s}}}.$$ *3 pont*